DAS

DIRICHLET'SCHE PRINCIP

IN SEINER ANWENDUNG AUF DIE

RIEMANN'SCHEN FLÄCHEN.

VON

CARL NEUMANN,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU TÜBINGEN, CORRESPONDENT DER GÖTTINGER SOCIETÄT DER WISSENSCHAFTEN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1865.

Inhalt.

Allgemeine Bemerkungen.

Will man eine Function von mehreren Argumenten innerhalb eines festgesetzten Gebietes durch gewisse Eigenschaften oder durch gewisse ihr auferlegte Bedingungen bestimmen, so wird auf Zweierlei zu achten sein. Erstens darauf, dass jene Bedingungen nicht zu viel verlangen; denn sonst würde eine denselben entsprechende Function nicht existiren. Zweitens darauf, dass jene Bedingungen nicht zu wenig verlangen; denn sonst wird die Function durch dieselben nicht vollständig bestimmt sein.

Die Bedingungen, denen man die Function zu unterwerfen gedenkt, sind also, bevor man solches thut, einmal zu controlliren in Bezug auf ihre Verträglichkeit, und zweitens in Bezug auf ihre Vollständigkeit. Im Allgemeinen scheint das Letztere leichter als das Erstere zu sein. In denjenigen Fällen wenigstens, die bisher behandelt sind, kann die Frage nach der Vollständigkeit mit Hülfe einer Methode erledigt werden, welche schon von Green und Gauss vielfach benutzt wurde; während die Frage nach der Verträglichkeit zu ihrer Entscheidung einer Methode bedarf, die erst später gefunden ist, einer Methode, deren Princip von Dirichlet, und deren weitere Entwickelung von Riemann herrührt.

Wir werden im Folgenden diese Methoden auseinandersetzen, und zwar für Functionen, die entweder von zwei reellen Argumenten, oder von einem complexen Argument abhängig sind, also für Functionen, die zu ihrer räumlichen Ausbreitung eines Gebietes von zwei Dimensionen, d. i. einer Fläche bedürfen. Zu Anfang werden wir uns mit Functionen beschäftigen, bei denen diese Fläche durch eine Elementarfläche repräsentirt wird; sodann später mit Functionen, die ihre Ausbreitung auf einer Riemann'schen Fläche finden.

Unter einer Elementarfläche ist eine ebene einblättrige Fläche zu verstehen, welche mit all ihren Puncten in der Endlichkeit liegt, und nur eine einzige Randcurve besitzt. Riemann'sche Flächen hingegen sollen diejenigen genannt werden, welche zur Ausbreitung beliebig gegebener algebraischer Functionen erforderlich sind; diese von Riemann eingeführten Flächen sind im Allgemeinen mehrblättrig, und je nach Umständen bald eben, bald kugelförmig zu denken. [Vorl. *) S. 53 und 162.]

Es wird zweckmässig sein, unserer Untersuchung einige allgemeine Bemerkungen vorangehen zu lassen.

Beschränkt man die Grössen x und y auf reelle Werthe, so werden durch Angabe des Werthes von $x + iy$ auch die Werthe von x und y bestimmt sein.**) Hält man also an der eben genannten Beschränkung fest, und versteht man unter $F(x, y)$ eine beliebig gegebene Function, so wird durch Angabe des Werthes von $x + iy$ auch der Werth von $F(x, y)$ bestimmt sein. Mit andern Worten: Die Function $F(x, y)$ ist, sobald man die Werthe von x und y in der angegebenen Weise beschränkt, nur von dem einen Argument $x + iy$ abhängig.

Ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn wir jene Beschränkung fallen lassen, wenn wir nämlich x und y als Grössen betrachten, die nach Belieben alle überhaupt denkbaren reelle und imaginäre Werthe annehmen dürfen. Thun wir dies, so wird die Angabe des Werthes von $x + iy$ zur Bestimmung der Werthe von x und y durchaus unzureichend sein, also im Allgemeinen auch unzureichend sein zur Bestimmung des Werthes von $F(x, y)$. Zu beachten sind hierbei indessen gewisse Ausnahme-Fälle. Auf diese wollen wir näher eingehen, und uns folgende Frage vorlegen:

Welche Beschaffenheit muss die Function $F(x, y)$ besitzen, wenn sie, trotz der hier angenommenen völlig unbeschränkten Veränderlichkeit der Grössen x, y, nur von dem einen Argument $x + iy$ abhängen soll?

---

*) Ich berufe mich hier, wie es hinfort noch öfters geschehen soll, auf meine kürzlich veröffentlichten „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale." Leipzig, 1865.

**) Unter i ist, wie gewöhnlich, die imaginäre Grösse $\sqrt{-1}$ zu verstehen.

Offenbar wird solches der Fall sein, wenn diejenigen Aenderungen von x, y, welche den Werth von $x + iy$ ungeändert lassen, auf den Werth von $F(x, y)$ ebenfalls ohne Wirkung sind; also der Fall sein, wenn die Function $F(x, y)$ bei einer Vertauschung von x, y mit $x + \alpha$, $y + i\alpha$ in ihrem Werthe nicht geändert wird. Unter α ist dabei jede beliebige reelle oder imaginäre Grösse zu verstehen.

Genügt also die Function $F(x, y)$ der Bedingung:

(1) $$F(x + \alpha,\ y + i\alpha) = F(x, y),$$

so wird sie nur von dem einen Argument $x + iy$ abhängen.

Die gestellte Frage ist hiermit eigentlich bereits erledigt. Die gefundene Bedingung (1) lässt sich aber noch in etwas anderer Form darstellen. Da α eine beliebig veränderliche Grösse ist, so können wir nach α differenziren; alsdann folgt aus (1):

(2) $$\frac{dF(x + \alpha,\ y + i\alpha)}{d\alpha} = 0.$$

Umgekehrt lässt sich aber auch (1) als Folge von (2) auffassen. Die Gleichung (2) verlangt nämlich, dass $F(x + \alpha,\ y + i\alpha)$ unabhängig von α ist. Soll das aber der Fall sein, so muss $F(x + \alpha,\ y + i\alpha)$ ungeändert bleiben, wenn man für α ganz beliebige Werthe einsetzt, mithin auch dann ungeändert bleiben, wenn man für α den Werth 0 setzt. Mit andern Worten: Die Gleichung (2) verlangt, dass $F(x + \alpha,\ y + i\alpha)$ gleich gross ist mit $F(x, y)$; verlangt also dasselbe, was durch die Gleichung (1) gefordert wird.

Von den Gleichungen (1) und (2) kann demnach, wie es uns beliebt, entweder die zweite als Folge der ersten, oder auch die erste als eine Folge der zweiten aufgefasst werden. Die beiden Gleichungen sind mithin äquivalent.

Wir ersetzen die Gleichung (1) durch die Gleichung (2). Diese letztere lässt sich ihrerseits auch so darstellen:

(3) $$\frac{\partial F(x + \alpha,\ y + i\alpha)}{\partial (x + \alpha)} + i\,\frac{\partial F(x + \alpha,\ y + i\alpha)}{\partial (y + i\alpha)} = 0,$$

oder, falls man $x + \alpha = X$, $y + i\alpha = Y$ setzt, auch so:

(4) $$\frac{\partial F(X, Y)}{\partial X} + i\,\frac{\partial F(X, Y)}{\partial Y} = 0.$$

Die Grössen x, y, α sind in ihren Werthen völlig unbeschränkt; Gleiches gilt mithin auch von den Grössen X, Y. Demnach kön-

nen wir, ohne in der Bedeutung dieser Grössen irgend welche Aenderung eintreten zu lassen, X, Y mit x, y vertauschen, die Gleichung (4) also auch so schreiben:

(5) $$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + i\,\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Die ursprünglich gefundene Bedingung (1) kann, wie wir sehen, ersetzt werden durch irgend eine der Gleichungen (2), (3), (4), (5). Wählt man hierzu die Gleichung (5), so ergiebt sich folgendes Resultat:

Eine Function $F(x, y)$, welche der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + i\,\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0$$

Genüge leistet, wird jederzeit — gleichgültig, ob man die Grössen x, y auf reelle Werthe beschränkt, oder ob man ihnen eine völlig unbeschränkte Veränderlichkeit einräumt — nur von dem einen Argument $x + iy$ abhängig sein.

Demgemäss soll eine dieser Differentialgleichung genügende Function in Zukunft kurzweg eine von $x + iy$ abhängende Function genannt werden.

Denkt man sich gegenwärtig die Grössen x, y wiederum auf reelle Werthe beschränkt, und bezeichnet man ausserdem die Function $F(x, y)$, wie sie bei Sonderung des Reellen und Imaginären sich gestaltet, mit $U(x, y) + iV(x, y)$, oder kürzer mit $U + iV$, so verwandelt sich die eben genannte Differentialgleichung in

$$\frac{\partial (U + iV)}{\partial x} + i\,\frac{\partial (U + iV)}{\partial y} = 0,$$

d. i. in folgende beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Demgemäss soll jeder Ausdruck $U(x, y) + iV(x, y)$ oder $U + iV$, welcher die Bedingungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

erfüllt, in Zukunft kurzweg eine von $x + iy$ abhängende Function genannt werden.

Bekanntlich gilt auch das Umgekehrte. Ist nämlich $f(t)$ eine beliebig gegebene Function, welche nur von dem einen Argument t abhängt, und versteht man unter $f(x+iy)$ denjenigen Ausdruck, welchen diese Function annimmt, sobald man in ihr an Stelle der Variablen t das Binom $x+iy$ substituirt, so wird offenbar $f(x+iy)$ eine Function zu nennen sein, die nur von dem **einen** Argument $x+iy$ abhängt. Bezeichnet man aber diesen Ausdruck $f(x+iy)$, wie er bei Sonderung des Reellen und Imaginären sich gestaltet, mit $U+iV$, so werden U und V jederzeit den so eben aufgestellten Bedingungen Genüge leisten. (Vorl. S. 78.)

Erster Abschnitt. Functionen von $x+iy$, welche auf einer Elementarfläche stetig sind, und deren reelle Theile am Rande dieser Fläche vorgeschriebene Werthe besitzen sollen.

Wir beginnen mit der Betrachtung einer Kreisfläche. Ihr Radius mag R heissen. Ferner mögen x, y die rechtwinkligen, und r, t die Polarcoordinaten irgend eines Punctes sein in Bezug auf ein Achsensystem, dessen Anfangspunct im Mittelpunct der Kreisfläche liegt. Zwischen x, y und r, t finden dann folgende Relationen statt:

$$x = r\cos t,$$
(1) $$y = r\sin t,$$
$$x+iy = r(\cos t + i\sin t) = re^{it}.$$

Die ins Unendliche fortlaufende Reihe

(2) $$1 + \frac{re^{it}}{R} + \left(\frac{re^{it}}{R}\right)^2 + \left(\frac{re^{it}}{R}\right)^3 + \ldots$$

ist bekanntlich immer convergent, so lange $r < R$ ist; wir bezeichnen sie zur Abkürzung mit

(3) $$\sum_0^\infty \left(\frac{re^{it}}{R}\right)^n \quad \text{oder} \quad \sum_0^\infty \left(\frac{x+iy}{R}\right)^n.$$

Es mögen nun A_0, A_1, A_2, ... und B_0, B_1, B_2, ... zwei Reihen von Constanten sein, die nach irgend welchem Gesetz ins Unendliche hinlaufen, deren Werthe aber durchweg endlich

bleiben; gleichzeitig mag unter $\varphi(x + iy)$ folgende Reihe verstanden werden:

$$(4) \qquad \varphi(x + iy) = \sum_0^{\infty} (A_n + iB_n)\left(\frac{x + iy}{R}\right)^n.$$

Von dieser Reihe gilt bekanntlich dasselbe, wie von der Reihe (2) oder (3). Sie ist convergent, so lange $r < R$ bleibt; oder mit andern Worten: sie ist convergent, so lange der Punct x, y innerhalb der gegebenen Kreisfläche bleibt.

Der Werth von $\varphi(x + iy)$ wird demnach, wenn wir dem Punct x, y im Innern der Kreisfläche eine beliebige Bewegung zuertheilen, niemals unbestimmt oder unendlich werden, und auch niemals unstetige Aenderungen erfahren. Mit andern Worten: Der Ausdruck $\varphi(x + iy)$ ist eine von $x + iy$ abhängende Function, welche innerhalb der Kreisfläche überall eindeutig und stetig bleibt. Gleiches gilt daher nach bekanntem Satz (Vorl. S. 91) auch von sämmtlichen Ableitungen dieser Function, d. i. von den Ausdrücken $\varphi'(x + iy)$, $\varphi''(x + iy)$, $\varphi'''(x + iy)$, ... Und Gleiches gilt demnach, wenn man den Werth von $\varphi(x + iy)$, wie er bei Sonderung des Reellen und Imaginären sich herausstellt, mit $u + iv$ bezeichnet, auch von den Functionen u, v, sowie von ihren sämmtlichen Ableitungen.*) Ausserdem werden diese Functionen, wie aus ihrer Bedeutung hervorgeht, den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Genüge leisten. (Vorl. S. 78.)

Die Werthe von u und v lassen sich leicht hinstellen. Nach (4) ist:

$$\varphi(x + iy) = \sum_0^{\infty} (A_n + iB_n)\left(\frac{x + iy}{R}\right)^n,$$

*) Sind p, q irgend welche ganze Zahlen, so sind unter sämmtlichen Ableitungen von u, v alle Ausdrücke zu verstehen, welche die Formen

$$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}, \qquad \frac{\partial^{p+q} v}{\partial x^p \partial y^q}$$

haben.

also mit Rückblick auf (1):

$$\varphi(x+iy) = \sum_0^\infty (A_n + iB_n) \frac{r^n \cos nt + ir^n \sin nt}{R^n}.$$

Hieraus aber folgt, wenn man das Reelle und Imaginäre sondert, unmittelbar:

(5)
$$u = \sum_0^\infty \frac{r^n (A_n \cos nt - B_n \sin nt)}{R^n},$$
$$v = \sum_0^\infty \frac{r^n (B_n \cos nt + A_n \sin nt)}{R^n}.$$

Diese Ausdrücke u und v sind zusammengesetzt aus den Polarcoordinaten r, t, und können daher entweder als Functionen von r, t oder auch als Functionen von x, y angesehen werden. Wir wählen die letztere Auffassung, und stellen dasjenige zusammen, was sich in Bezug auf u ergeben hat; v soll fortan ganz ausser Spiel bleiben.

Sind A_0, A_1, A_2, ... und B_0, B_1, B_2, ... zwei Reihen reeller Constanten, die nach irgend welchem Gesetz ins Unendliche fortlaufen, dabei aber **durchweg endlich** *bleiben, so ist der Ausdruck*

(6)
$$u = A_0 + A_1 \frac{r\cos t}{R} + A_2 \frac{r^2 \cos 2t}{R^2} + \dots$$
$$- B_1 \frac{r \sin t}{R} - B_2 \frac{r^2 \sin 2t}{R^2} - \dots$$

eine von x, y abhängende Function, welche sammt all ihren Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots$$

innerhalb der gegebenen Kreisfläche stetig bleibt, und welche ausserdem der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Genüge leistet.

Die noch unbestimmten Constanten A, B können nun der Art gewählt werden, dass die Function u am Rande der Kreisfläche gegebene Werthe annimmt. Ist nämlich $f(t)$ eine beliebig gegebene reelle Function von t, welche von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ stetig auf einander folgende Werthe besitzt, und welche für $t = 0$

ebenso gross ist, wie für $t = 2\pi$, so lassen sich die ebengenannten Werthe durch eine Fourier'sche Reihe von folgender Form darstellen:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \dots \\ - b_1 \sin t - b_2 \sin 2t - \dots \tag{7}$$

Die Constanten a, b werden sich nämlich jederzeit so bestimmen lassen, dass diese Reihe für alle Argumente t, welche zwischen 0 und 2π liegen, von gleichem Werth ist mit der gegebenen Function $f(t)$.*) Die Constanten a, b werden je nach Beschaffenheit der gegebenen Function $f(t)$ sehr verschieden ausfallen. Immer aber werden diese Constanten durchweg endlich sein; denn sonst würde die Reihe nicht mehr convergent, mit der gegebenen Function also auch nicht mehr von gleichem Werth sein können.

Wir denken uns die Werthe, welche $f(t)$ von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ besitzt, am Rande der gegebenen Kreisfläche aufgepflanzt. Soll nun die vorhin aufgestellte Function u (6) am Rande der Kreisfläche die ebengenannten Werthe besitzen, soll also die Function u für $r = R$ identisch werden mit $f(t)$, so muss man die in u enthaltenen noch unbestimmten Constanten A, B gleich gross nehmen mit denjenigen Constanten a, b, welche in der Entwickelung von $f(t)$ auftreten. Und solches ist erlaubt. Denn die in u enthaltenen Constanten A, B waren nur der einen Bedingung unterworfen, durchweg endlich zu bleiben; diese Bedingung wird aber von den Constanten a, b, wie wir bereits gesehen haben, erfüllt. Wir gelangen somit zu folgendem Satz:

Sind x, y die Puncte einer Kreisfläche $\mathfrak{K}$, so existirt jederzeit eine reelle Function von x, y, welche am Rande von $\mathfrak{K}$ beliebig gegebene Werthe besitzt, und welche gleichzeitig im Innern von $\mathfrak{K}$ folgende Eigenschaften hat:

I. *Die Function und all ihre Ableitungen sind stetig.*

II. *Die Function genügt der Gleichung* $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$.

Denkt man sich die gegebenen Randwerthe, sie mögen f genannt werden, nach der Fourier'schen Reihe entwickelt:

*) Dass die hier ausgesprochene Behauptung richtig ist, hat bekanntlich Dirichlet mit voller Strenge nachgewiesen.

$$f = a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \ldots$$
$$- b_1 \sin t - b_2 \sin 2t - \ldots,$$

so ist die in Rede stehende Function, sie mag u heissen, folgende:

$$u = a_0 + a_1 \frac{r \cos t}{R} + a_2 \frac{r^2 \cos 2t}{R^2} + \ldots$$
$$- b_1 \frac{r \sin t}{R} - b_2 \frac{r^2 \sin 2t}{R^2} - \ldots$$

Hier stellt R den Radius der Kreisfläche vor; ferner sind hier unter r, t die Polarcoordinaten des Punctes x, y in Bezug auf den Mittelpunct der Kreisfläche zu verstehen.

Dass eine den gestellten Bedingungen genügende Function existirt, ist also hier auf die bündigste Weise dargethan, nämlich dargethan durch die wirkliche Aufstellung der Function.

Möglicherweise könnte ausser der hier aufgestellten Function u noch eine andere u_1 vorhanden sein, welche gleichfalls die gegebenen Randwerthe f und die Eigenschaften I, II besitzt. Alsdann wird die Differenz

$$u - u_1 = \omega$$

eine Function sein, deren Randwerthe $= 0$ sind, und welche wiederum die Eigenschaften I, II besitzt. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich leicht folgende Formel (vergl. Vorl. S. 62):

$$\iint_{\mathfrak{K}} \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy = - \int_{\mathfrak{K}} \omega \frac{d\omega}{dn}\, ds.$$

Hier erstreckt sich die Integration links über die Fläche von $\mathfrak{K}$, die rechts über den Rand von $\mathfrak{K}$; ds ist ein Element dieses Randes, und n die auf ds errichtete innere Normale.

Da nun die Randwerthe von ω durchgängig $= 0$ sind, so geht die vorstehende Formel über in

$$\iint_{\mathfrak{K}} \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy = 0.$$

Und hieraus folgt, dass die Grössen $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ innerhalb $\mathfrak{K}$ allenthalben $= 0$ sind, dass mithin ω selber im Innern von $\mathfrak{K}$ überall constant ist. Die Function ω hat aber am Rande von $\mathfrak{K}$ den Werth 0; ihr constanter Werth im Innern von $\mathfrak{K}$ kann demnach kein anderer als der Werth 0 sein.

Somit zeigt sich, dass die Differenz

$$u - u_1 = \omega$$

nothwendiger Weise **gleich Null** ist, dass also neben u keine andere Function vorhanden sein kann, welche den gestellten Anforderungen Genüge leistet. Wir können demnach zu dem vorhergehenden Satz noch Folgendes fügen:

Es existirt nur eine einzige Function, welche am Rande der Kreisfläche gegebene Werthe, und im Innern derselben die Eigenschaften I, II *besitzt.*

Wir fahren in unserer Untersuchung weiter fort. Nach wie vor mag u diejenige Function sein, welche am Rande von $\mathfrak{K}$ die Werthe f, und im Innern von $\mathfrak{K}$ die Eigenschaften I, II besitzt. Neben u wollen wir gegenwärtig noch irgend welche andere Function U betrachten, die am Rande von $\mathfrak{K}$ ebenfalls die Werthe f besitzen soll, von welcher wir aber, was ihr Verhalten im **Innern** von $\mathfrak{K}$ anbelangt, nur voraussetzen, dass sie daselbst überall **stetig** ist.*)

Wir bilden das über die Kreisfläche $\mathfrak{K}$ hinerstreckte Integral

$$(1) \qquad \iint\limits_{\mathfrak{K}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy,$$

und bezeichnen dasselbe zur Abkürzung mit

$$(1\text{ a.}) \qquad \underset{\mathfrak{K}}{\Pi}(U)$$

Setzen wir für den Augenblick $U = u + \delta$, so ergiebt sich, wenn wir in diesem Integrale $u + \delta$ statt U substituiren, folgende identische Gleichung:

$$\underset{\mathfrak{K}}{\Pi}(u + \delta) = \underset{\mathfrak{K}}{\Pi}(u) + \underset{\mathfrak{K}}{\Pi}(\delta) + \\ + 2 \iint\limits_{\mathfrak{K}} \left\{ \frac{\partial \delta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \right\} dx\, dy;$$

oder, wenn wir für δ seine eigentliche Bedeutung $U - u$ restituiren:

---

*) Wir nehmen also, wie auch in Zukunft bei ähnlichen Fällen wohl zu beachten ist, nur an, dass die Function U **selber** stetig ist, machen aber keinerlei Voraussetzung über die Stetigkeit oder Unstetigkeit ihrer Ableitungen.

(2) $$\underset{\mathfrak{K}}{\Pi}(U) = \underset{\mathfrak{K}}{\Pi}(u) + \underset{\mathfrak{K}}{\Pi}(U-u) + 2\underset{\mathfrak{K}}{T},$$

wo $\underset{\mathfrak{K}}{T}$ folgendes Integral bezeichnet:

(3) $$\underset{\mathfrak{K}}{T} = \iint\limits_{\mathfrak{K}} \left\{ \frac{\partial (U-u)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (U-u)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dx\, dy.$$

Nun ist identisch:

(4) $$\begin{aligned} \frac{\partial (U-u)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[(U-u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - (U-u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial (U-u)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[(U-u)\frac{\partial u}{\partial y}\right] - (U-u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Da u die Eigenschaften I, II besitzt, so ist der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

innerhalb $\mathfrak{K}$ überall $= 0$. Substituirt man also die Werthe (4) in das Integral (3), und setzt man dabei zur Abkürzung

(5) $$\begin{aligned} (U-u)\frac{\partial u}{\partial x} &= \alpha, \\ (U-u)\frac{\partial u}{\partial y} &= \beta, \end{aligned}$$

so ergiebt sich:

(6) $$\underset{\mathfrak{K}}{T} = \iint\limits_{\mathfrak{K}} \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right\} dx\, dy.$$

Die Function u besitzt innerhalb $\mathfrak{K}$ die Eigenschaften I, II. Demnach sind u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ innerhalb $\mathfrak{K}$ überall stetig. Gleiches gilt, der über U gemachten Voraussetzung zufolge, auch von U. Und Gleiches gilt mithin auch von den in (5) hingestellten Ausdrücken α und β. Zufolge eines bekannten Satzes (Vorl. S. 59) lässt sich daher das Integral (6) in folgendes Rand-Integral verwandeln:

(7) $$\underset{\mathfrak{K}}{T} = -\int\limits_{\mathfrak{K}} \left(\alpha \frac{dx}{dn} + \beta \frac{dy}{dn} \right) ds.$$

Hier ist ds ein Element des Randes von $\mathfrak{K}$, und n die auf ds errichtete innere Normale. Substituirt man schliesslich für α und β ihre eigentlichen Bedeutungen (5), so erhält man:

(8) $$T_{\mathfrak{K}} = - \int_{\mathfrak{K}} (U - u) \frac{du}{dn} ds.$$

Der Voraussetzung zufolge besitzt aber U am Rande von $\mathfrak{K}$ dieselben Werthe wie u; demnach ist $U - u$ am Rande von $\mathfrak{K}$ überall $= 0$. Folglich:

(9) $$T_{\mathfrak{K}} = 0.$$

Somit reducirt sich die vorhin in (2) gefundene Formel auf:

(10) $$\Pi_{\mathfrak{K}}(U) = \Pi_{\mathfrak{K}}(u) + \Pi_{\mathfrak{K}}(U - u).$$

Hier repräsentirt U irgend eine Function, die am Rande von $\mathfrak{K}$ gleichwerthig mit u, und im Innern von $\mathfrak{K}$ stetig ist. Solcher Functionen U giebt es offenbar unendlich viele. Eine unter diesen unendlich vielen ist die Function u selber.

Beachtet man, dass die mit $\Pi_{\mathfrak{K}}$ bezeichneten Integrale ihrer Bedeutung zufolge jederzeit positiv sind, so ergiebt sich aus der vorstehenden Formel (10) unmittelbar, dass $\Pi_{\mathfrak{K}}(U)$ grösser als $\Pi_{\mathfrak{K}}(u)$ ist. Eine Ausnahme hiervon wird nur dann eintreten, wenn zufälliger Weise $\Pi_{\mathfrak{K}}(U - u)$ gleich 0 ist; letzteres kann aber, wie leicht zu übersehen ist, nur dann der Fall sein, wenn $U - u$ gleich 0 ist, also nur dann, wenn U identisch mit u ist.

Es wird daher $\Pi_{\mathfrak{K}}(U)$ jederzeit entweder grösser als $\Pi_{\mathfrak{K}}(u)$, oder gleich $\Pi_{\mathfrak{K}}(u)$ sein. Ersteres wird stattfinden, so lange U verschieden von u, letzteres, falls U identisch mit u ist. Sucht man also unter den unendlich vielen Functionen U diejenige auf, für welche das Integral $\Pi_{\mathfrak{K}}$ am kleinsten ist, so wird die so erhaltene Function identisch mit u sein. Wir gelangen somit zu folgendem Satz:

Sind x, y die Puncte einer Kreisfläche $\mathfrak{K}$, so wird unter den von x, y auf reelle Weise abhängenden Functionen U, welche am Rande von $\mathfrak{K}$ gegebene Werthe besitzen, und im Innern von $\mathfrak{K}$ stetig sind, eine vorhanden sein, für welche das Integral

$$\iint_{\mathfrak{K}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

oder

$$\Pi_{\mathfrak{K}}(U)$$

am kleinsten ist. Diese specielle Function U, sie mag u heissen, ist ausgezeichnet durch folgende Eigenschaften:

I. u und all ihre Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, ... sind innerhalb $\mathfrak{K}$ stetig.

II. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ist innerhalb $\mathfrak{K}$ überall $= 0$.

Wir gehen über zur Betrachtung einer beliebig gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$. Es sei, ähnlich wie vorhin, U eine Function von x, y, welche am Rande von $\mathfrak{E}$ gegebene Werthe besitzt, und innerhalb $\mathfrak{E}$ stetig ist, welche sonst aber hinsichtlich ihrer Gestalt oder Beschaffenheit keinerlei Beschränkung unterworfen sein soll. Das über die Fläche $\mathfrak{E}$ ausgedehnte Integral

$$\iint_{\mathfrak{E}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

oder

$$\Pi_{\mathfrak{E}}(U)$$

kann niemals negativ werden. Unter den unendlich vielen Gestalten, deren die Function U fähig ist, muss demnach eine existiren, für welche das Integral am kleinsten ist. Wir wollen uns denken, diese specielle Gestalt der Function U sei auf irgend welchem Wege ermittelt worden; sie mag bezeichnet werden mit u.

Die Function U ist von veränderlicher Gestalt, nur gebunden durch die ihr auferlegten Randwerthe, und durch den stetigen Zusammenhang ihrer Binnenwerthe. Die Function u hingegen ist von unveränderlicher Gestalt; sie repräsentirt die-

jenige **bestimmte** Gestalt der Function *U*, für welche das Integral $\varPi_{\mathfrak{E}}$ am kleinsten ist.

Wir betrachten *u* als die **primitive** Gestalt von *U*; wir denken uns nämlich die Function *U* zu Anfang in die Gestalt *u* versetzt, und lassen sie sodann von hier aus irgend welche andere Gestalten durchlaufen, die innerhalb des ihr angewiesenen Spielraumes liegen. Diese nachfolgenden Gestalten entstehen aus der primitiven Gestalt *u* durch Schwankungen, die entweder total oder partiell sind, d. h. durch Schwankungen, die sich entweder über die **ganze** Fläche 𝔈, oder nur über ein **Stück** derselben erstrecken.

Für unsere Zwecke ist es angemessen, eine gewisse Art partieller Schwankungen eintreten zu lassen. Um die Vorstellung zu fixiren, mag auf der Fläche 𝔈 eine in sich zurücklaufende Curve λ construirt werden. Durch diese wird die Fläche in zwei Stücke 𝔄 und 𝔍 zerlegt, von welchen das eine 𝔄 ausserhalb, das andere 𝔍 innerhalb der Curve liegt. Gleichzeitig wird dadurch die Function *U* ebenfalls in zwei Theile zerlegt, nämlich in denjenigen Theil, welcher auf 𝔄, und in den, welcher auf 𝔍 ausgebreitet ist. Der erstgenannte Theil mag nun in seiner primitiven Gestalt **erstarrt** gedacht werden; der letztere hingegen, nämlich der auf 𝔍 ausgebreitete, mag **beweglich** geblieben sein.

Die Schwankungen des einen Theiles sind dann Null, die Schwankungen des andern hingegen willkührlich, wenigstens willkührlich innerhalb eines gewissen Spielraumes. Beide Theile sollen nämlich (zufolge der über *U* gemachten Voraussetzung) zusammengenommen jederzeit ein stetiges Ganzes bilden. Der beweglich gebliebene, zu 𝔍 gehörige Theil von *U* wird demnach in seinen Schwankungen **einerseits** gebunden sein durch die ihm am Rande von 𝔍 auferlegten Werthe; diese müssen jederzeit identisch bleiben mit den Werthen des angrenzenden erstarrten Theiles, also identisch bleiben mit denjenigen Werthen, welche die Function *U* während ihrer primitiven Gestalt *u* auf jenem Rande besitzt. **Andererseits** wird der beweglich gebliebene Theil von *U* in seinen Schwankungen auch noch gebunden sein durch den stetigen Zusammenhang, welcher zwischen seinen Werthen im Innern von 𝔍 jederzeit stattfinden muss.

Das Integral $\Pi_{\mathfrak{E}}(U)$ ist am kleinsten, so lange sich die Function U in ihrer primitiven Gestalt u befindet; es wird dasselbe also wachsen, sobald sich die Function U in Folge der eben besprochenen partiellen Schwankungen von ihrer primitiven Gestalt entfernt. Das Integral besteht aber aus zwei Gliedern:

$$\Pi_{\mathfrak{E}}(U) = \Pi_{\mathfrak{A}}(U) + \Pi_{\mathfrak{J}}(U),$$

von welchen das erstere bei Eintritt jener Schwankungen constant bleibt. Also:

$$\Pi_{\mathfrak{E}}(U) = \text{Const.} + \Pi_{\mathfrak{J}}(U).$$

Das Wachsen des Integrales muss demnach seinen Grund haben in einem Wachsen des zweiten Gliedes. Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Das Integral $\Pi_{\mathfrak{J}}(U)$, durch welches das eben genannte zweite Glied repräsentirt wird, ist am kleinsten, so lange die Function U in ihrer primitiven Gestalt u bleibt, und wächst, sobald sie sich aus jener Gestalt, in Folge der besprochenen partiellen Schwankungen, entfernt. Mit andern Worten:

Das Integral $\Pi_{\mathfrak{J}}$ ist für die Function u kleiner als für jede andere Function, die am Rande von $\mathfrak{J}$ gleichwerthig mit u, und im Innern von $\mathfrak{J}$ stetig ist.

Es sei p ein beliebiger Punct auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{E}$; ferner sei $\mathfrak{K}$ eine um p herum abgegrenzte Kreisfläche, welche vollständig innerhalb $\mathfrak{E}$ liegt. An Stelle von $\mathfrak{J}$ mag diese Kreisfläche $\mathfrak{K}$ genommen werden. Unter allen überhaupt denkbaren Functionen, welche am Rande von $\mathfrak{K}$ gleichwerthig mit u, und im Innern von $\mathfrak{K}$ stetig sind, wird dann u selber diejenige sein, für welche das Integral $\Pi_{\mathfrak{K}}$ am kleinsten ist. Zufolge des vorhin gefundenen Satzes (S. 13) ist daher u eine Function, welche innerhalb $\mathfrak{K}$ die dort angegebenen Eigenschaften I, II besitzt. $\mathfrak{K}$ repräsentirt aber das Bereich eines auf der Fläche $\mathfrak{E}$ ganz beliebig gewählten Punctes p. Was daher für $\mathfrak{K}$, d. h. für das

Bereich des Punctes p gilt, wird auch gelten für das Bereich eines jeden andern zur Fläche $\mathfrak{E}$ gehörigen Punctes, also gelten für die ganze Fläche $\mathfrak{E}$. Somit erhalten wir folgenden Satz:

Versteht man unter x, y die Puncte einer Elementarfläche $\mathfrak{E}$, so wird unter allen auf reelle Weise von x, y abhängenden Functionen U, welche am Rande von $\mathfrak{E}$ gegebene Werthe besitzen, und im Innern von $\mathfrak{E}$ stetig sind, eine existiren, für welche das Integral

$$\iint_{\mathfrak{E}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

oder

$$\Pi_{\mathfrak{E}}(U)$$

am kleinsten ist. Diese specielle Function U, sie mag u heissen, ist ausgezeichnet durch folgende Eigenschaften:

I. *u und all ihre Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, ... sind innerhalb $\mathfrak{E}$ stetig.*

II. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *ist innerhalb $\mathfrak{E}$ überall $= 0$.**)

Wir gehen weiter vorwärts in der begonnenen Untersuchung. $\mathfrak{E}$ und u mögen dieselben Bedeutungen behalten, wie in dem eben angegebenen Satz. Auf $\mathfrak{E}$ denken wir uns irgend zwei Puncte s und p, von welchen der erstere fest, der letztere beweglich sein soll. Zugleich verstehen wir unter K eine beliebig gewählte reelle Constante; und bilden nun folgendes Integral:

---

*) Wollte man den hier angegebenen Satz über die Elementarfläche auf ganz directem Wege nachzuweisen versuchen, nämlich zu beweisen versuchen, ohne zuvor den analogen Satz über die Kreisfläche festzustellen, so würde man allerdings leicht zeigen können, dass die der Bedingung

$$\Pi_{\mathfrak{E}}(u) = \text{Min.}$$

Genüge leistende Function u die Eigenschaft II besitzt. Dass dieselbe aber gleichzeitig auch die Eigenschaft I besitzt, würde dabei entweder zweifelhaft bleiben, oder doch nur dargethan werden können mit Hülfe von beschwerlichen Nebenuntersuchungen.

Der von mir hier eingeschlagene indirecte Weg ist jedenfalls durchaus strenge, und wird, wie ich glaube, auch was seine Uebersichtlichkeit anbelangt, Nichts zu wünschen übrig lassen.

$$(1) \qquad v = K + \int_s^p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \, dy - \frac{\partial u}{\partial y} \, dx \right).$$

Die Bahn $s \ldots p$ dieses Integrales soll auf die Fläche $\mathfrak{E}$ beschränkt sein, den Rand dieser Fläche also nirgends überschreiten dürfen; sonst aber soll sie, abgesehen von ihrem festen Anfangspunct s, sich nach Willkühr bewegen dürfen.

Die Grössen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ sind zufolge der Eigenschaften I, II auf der Fläche $\mathfrak{E}$ überall stetig. Lassen wir also den beweglichen Endpunct der Bahn $s \ldots p$ weiter vorrücken, so wird sich der Werth des Integrales Schritt für Schritt auf stetige Weise ändern.

Wir denken uns zwei Bahnen σ' und σ'', welche von dem angenommenen festen Punct s auf verschiedenen Wegen fortlaufen, welche schliesslich aber in ein und demselben Punct p endigen, und bezeichnen die Werthe, mit welchen das Integral v, je nach Durchlaufung der einen oder andern Bahn, im Puncte p anlangt, mit v' und mit v''. Die beiden Bahnen σ' und σ'' bilden zusammengenommen eine in sich zurücklaufende Curve. Ist nun $\mathfrak{J}$ dasjenige Stück der Fläche $\mathfrak{E}$, welches innerhalb dieser Curve liegt, so wird die Differenz

$$(2) \qquad v' - v''$$

nichts anderes sein, als das um den Rand von $\mathfrak{J}$ herumerstreckte Integral

$$(3) \qquad \int_{\mathfrak{J}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \, dy - \frac{\partial u}{\partial y} \, dx \right).$$

Da $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ auf der Fläche $\mathfrak{E}$ überall $= 0$ ist, so stellt

$$\frac{\partial u}{\partial x} \, dy - \frac{\partial u}{\partial y} \, dx$$

ein Differential vor, welches auf $\mathfrak{E}$, mithin auch auf $\mathfrak{J}$ überall vollständig ist. Zugleich sind die in diesem Differential vorhandenen Grössen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ auf $\mathfrak{J}$ überall stetig. Daraus folgt (vergl. Vorl. S. 70), dass das Integral (3) gleich 0, dass mithin die Differenz (2) ebenfalls gleich 0 ist. Also:

$$v' = v''.$$

Der Werth, mit welchem das Integral in irgend einem Puncte p eintrifft, ist demnach unabhängig von der durchlaufenen Bahn;

er wird also nur abhängen von der Lage des Punctes p; oder er wird, wenn die Coordinaten des Punctes p mit x, y bezeichnet werden, nur abhängen von x, y. Somit ergiebt sich Folgendes:

Das von dem angenommenen Punct s ausgehende und in seiner Bewegung auf die Fläche 𝔈 beschränkte Integral

$$(4) \qquad v = K + \int_s^p \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\right)$$

repräsentirt, falls man die Coordinaten für den Punct p, d. i. für den beweglichen Endpunct seiner Bahn mit x, y bezeichnet, eine von x, y abhängende Function, welche für jede Lage dieses Punctes immer nur einen Werth besitzt, und welche sich bei weiterem Vorrücken des Punctes Schritt für Schritt auf stetige Weise ändert. Mit andern Worten: Jenes Integral v ist eine von x, y abhängende Function, die auf der Fläche 𝔈 überall eindeutig und stetig ist.

Aus (4) folgt:

$$dv = \frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx,$$

mithin:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Daraus folgt, dass $u + iv$ eine Function vorstellt, die nur von dem einen Argument $x + iy$ abhängig ist (vgl. S. 4). Es mag noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass v eine willkührliche Constante K enthält. Durch geeignete Wahl von K wird man also bewirken können, dass v in irgend einem Puncte der Fläche 𝔈 einen vorgeschriebenen Werth annimmt. Beachten wir dieses, so gelangen wir schliesslich zu folgendem Theorem.

Erstes Theorem.

Versteht man unter x, y die Puncte einer Elementarfläche 𝔈, so lässt sich auf dieser Fläche immer eine von $x + iy$ abhängende Function $u + iv$ ausbreiten, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. *$u + iv$ ist auf 𝔈 überall stetig.*
2. *u hat am Rande von 𝔈 beliebig gegebene Werthe.*



3. *v hat in irgend einem einzelnen Punct von $\mathfrak{C}$ einen vorgeschriebenen Werth.*

Zusatz. Es existirt immer nur eine einzige Function $u + iv$, welche diesen Bedingungen Genüge leistet.

Um den eben ausgesprochenen Zusatz zu beweisen, wollen wir annehmen, es existirten zwei Functionen $u + iv$ und $u_1 + iv_1$, welche jenen Bedingungen Genüge leisten. Die Differenz

$$(u + iv) - (u_1 + iv_1) = \omega + i\vartheta$$

wird dann folgende Eigenschaften besitzen:

1. $\omega + i\vartheta$ ist eine von $x + iy$ abhängende Function, welche innerhalb $\mathfrak{C}$ überall eindeutig und stetig ist.

2. ω ist im Rande von $\mathfrak{C}$ überall gleich 0.

3. ϑ ist in einem einzelnen Punct der Fläche $\mathfrak{C}$ gleich 0.

Da ω am Rande von $\mathfrak{C}$ überall $= 0$ ist, so wird das in positiver Richtung über den Rand von $\mathfrak{C}$ hinerstreckte Integral

$$\int_{\mathfrak{C}} \omega \, d\vartheta$$

ebenfalls $= 0$ sein. Hieraus folgt nach bekanntem Satze (Vorl. S. 129), dass die Differenz $\omega + i\vartheta$ auf der Fläche $\mathfrak{C}$ einen überall constanten Werth hat. Dieser constante Werth kann aber, weil ω am Rande, und ϑ in einem einzelnen Punct gleich 0 ist, kein anderer als der Werth 0 sein. Somit ergiebt sich, dass die Differenz $\omega + i\vartheta$ überall $= 0$ ist; mit andern Worten, dass nur eine einzige Function $u + iv$ vorhanden sein kann, welche den im Theorem angegebenen Bedingungen Genüge leistet.

Die eben durchgeführte Untersuchung hat ihren Schwerpunct in dem reellen Theil von $u + iv$, nämlich in der Function u. Ist die Existenz dieser Function einmal dargethan, so ergiebt sich alles Uebrige von selber. Um die Existenz von u nachzuweisen, haben wir uns des Integrales:

$$\iint_{\mathfrak{C}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

bedient. Dieses Integral musste, falls man die Function U auf ein gewisses Gebiet von Gestalten beschränkt, für irgend eine

dieser Gestalten am kleinsten sein; und hieraus ergab sich dann die Existenz der in Rede stehenden Function u.

Das Princip unserer Untersuchung besteht also darin, dass die Existenz einer mit vorgeschriebenen Eigenschaften behafteten Function aus einem gewissen Integral gefolgert wird, welches nothwendigerweise einen Minimalwerth besitzen muss. Dieses Princip ist von Dirichlet in seinen Vorlesungen über die dem umgekehrten Quadrat der Entfernung proportinal wirkenden Kräfte mitgetheilt worden*); und wird demgemäss von Riemann das Dirichlet'sche Princip genannt.

Dasselbe Princip wird nun auch bei den folgenden Untersuchungen fortwährend zur Anwendung kommen. Nur wird das dabei benutzte Integral den Umständen gemäss zuweilen durch ein anderes von Riemann angegebenes Integral ersetzt werden müssen, durch ein Integral, dessen Entdeckung von grosser Wichtigkeit war, welches aber in Riemann's grossartigem Werk nur ein unbedeutender Stein ist im staunenswerthen Gefüge des Ganzen.

Zweiter Abschnitt. Ueber die Reduction einer Riemann'schen Kugelfläche auf ein System von Elementarflächen, und über die bei dieser Reduction auftretenden Invarianten.

Eine Riemann'sche Kugelfläche kann jederzeit reducirt werden auf ein System von Elementarflächen. Denken wir uns nämlich auf der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche irgend einen Punct $a + ib$, und grenzen wir um diesen Punct herum ein kleines Flächenstück ab, welches, je nachdem der Punct $a + ib$ ein gewöhnlicher oder ein Windungspunct ist, entweder keinen oder nur diesen einen Windungspunct enthält, so wird sich das Flächenstück durch stetige Umformung verwandeln lassen in eine Elementarfläche. Ist $a + ib$ verschieden von ∞, so lässt sich diese Umformung der Art bewerkstelligen, dass jeder zum Flächenstück gehörige Punct $x + iy$ in denjenigen Punct $\xi + i\eta$ der Elementarfläche übergeht, welcher mit ihm durch die Relation

*) Vergl. Riemanns Abhandlung (Borchardts Journal Bd. 54, S. 111.).

(1) $$\xi + i\eta = \sqrt[m]{(x + iy) - (a + ib)}$$

verbunden ist, wo m eine gewisse positive ganze Zahl vorstellt, deren Bedeutung sogleich angegeben werden soll. Ist andererseits $a + ib$ verschieden von 0, so lässt sich die in Rede stehende Umformung der Art bewerkstelligen, dass die genannten Puncte $x + iy$ und $\xi + i\eta$ mit einander verbunden sind durch die Relation:

(2) $$\xi + i\eta = \sqrt[m]{\frac{1}{x + iy} - \frac{1}{a + ib}}.$$

Die Zahl m stellt die Anzahl von Blättern vor, welche bei dem betrachteten Flächenstück im Punct $a + ib$ mit einander zusammenhängen; sie wird also $= 1$ sein, falls $a + ib$ ein gewöhnlicher Punct ist, hingegen $= 2, 3, 4, \ldots$ sein, falls $a + ib$ ein Windungspunct erster, zweiter, dritter, u. s. w. Ordnung ist (Vorl. Seite 236).

Die correspondirenden Puncte des betrachteten Flächenstücks und der daraus durch stetige Umformung entstehenden Elementarfläche sind, wie wir sehen, je nach den Umständen entweder durch die Relation (1) oder durch die Relation (2) mit einander verbunden; immer sind sie also mit einander verbunden durch eine Relation von der Form

(3) $$\xi + i\eta = \varphi(x + iy);$$

d. h. $\xi + i\eta$ ist niemals an x und y, sondern immer nur an das eine Argument $x + iy$ gebunden.

Das betrachtete Flächenstück und die daraus durch Umformung entstehende Elementarfläche sind unter einander identisch, nämlich als zwei verschiedene Zustände ein und derselben Fläche zu betrachten. Zur Unterscheidung nenne ich den ersteren Zustand den ursprünglichen, den letzteren den natürlichen. Für ein und denselben Punct werden mithin x, y die ursprünglichen, und ξ, η die natürlichen Coordinaten zu nennen sein.

Wir wollen uns das Flächenstück zur Zeit seines ursprünglichen Zustandes mit irgend welchen Functionswerthen belastet denken; ob dieselben von x und y abhängen, oder ob sie nur von dem einen Argument $x + iy$ abhängig sind, ist gleichgültig. Diese Werthe mögen mit den Puncten des Flächenstückes unlöslich verbunden sein; so dass der in jedem einzelnen Punct vorhandene Werth — gleichgültig ob das Flächenstück in seinem

ursprünglichen Zustande verharrt, oder ob es in seinen natürlichen Zustand übergeht — immer ein und derselbe bleibt. Mit Rücksicht auf diese beiden Zustände ergeben sich für die betrachteten Functionswerthe zwei verschiedene Arten von Ableitungen, nämlich einerseits die Ableitungen nach den ursprünglichen Coordinaten x, y, und andererseits diejenigen, welche nach den natürlichen Coordinaten ξ, η gebildet sind. Die einen werden wir erhalten, wenn wir uns das Flächenstück im ursprünglichen Zustande denken, die andern, wenn wir uns dasselbe in den natürlichen Zustand versetzt denken. Der Kürze willen sollen die ersteren die ursprünglichen Ableitungen, die letzteren die natürlichen Ableitungen genannt werden.

Bekannt ist folgender Satz (Vorl. S. 91):

Sind x, y die Puncte einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$, und ist $f(x + iy)$ eine von $x + iy$ abhängende Function, welche auf $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig ist, so gilt Gleiches auch von den Ableitungen dieser Functionen, d. i. von $f'(x + iy)$, $f''(x + iy)$, $f'''(x + iy)$, u. s. w.

Dieser Satz lässt sich auf die Riemann'schen Flächen allerdings nicht unmittelbar übertragen, wohl aber, wenn man gewisse Modificationen eintreten lässt, in folgender Weise:

Es sei $\mathfrak{S}$ irgend ein Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, und f eine von $x + iy$ abhängende Function, welche auf $\mathfrak{S}$ überall eindeutig und stetig ist. Wir betrachten auf dem gegebenen Flächentheil $\mathfrak{S}$ einen beliebigen Punct, und grenzen um diesen Punct herum ein Flächenstück $\mathfrak{J}$ ab, welches nicht mehr als höchstens einen Windungspunct enthält; gleichzeitig bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}$ diejenige Elementarfläche, durch welche der natürliche Zustand dieses Flächenstücks dargestellt wird. Demgemäss mögen die beiden Bilder, welche das Flächenstück sammt den darauf ausgebreiten Werthen von f in seinem ursprünglichen und in seinem natürlichen Zustande darbietet, angedeutet werden durch

$$(\mathfrak{J},\quad x + iy,\quad f),$$

und durch

$$(\mathfrak{E},\quad \xi + i\eta,\quad f).$$

Nach der gemachten Voraussetzung ist f eine Function von $x + iy$, das Binom $x + iy$ ist aber seinerseits [zufolge (3)] abhängig von $\xi + i\eta$; demnach wird f auch angesehen werden können als eine

Function von $\xi + i\eta$. Diese von $\xi + i\eta$ abhängende Function f ist, weil sie der Voraussetzung nach auf $\mathfrak{J}$ überall eindeutig und stetig sein sollte, auf der Elementarfläche $\mathfrak{E}$ ebenfalls überall eindeutig und stetig. Gleiches gilt daher, zufolge des eben angeführten Satzes, auch von den Ableitungen $f'(\xi + i\eta)$, $f''(\xi + i\eta)$, $f'''(\xi + i\eta)$ u. s. w., d. i. von den natürlichen Ableitungen. Das Resultat, zu welchem wir hiemit gelangt sind, bezieht sich auf das Flächenstück $\mathfrak{J}$, d. i. auf das Bereich eines Punctes, welcher auf dem gegebenen Flächentheile $\mathfrak{S}$ beliebig gewählt war; demnach wird jenes Resultat gültig sein für den ganzen gegebenen Flächentheil. Wir haben mithin folgenden Satz:

Versteht man unter $\mathfrak{S}$ irgend einen Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, ferner unter x, y die zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Puncte, und ist f eine von $x + iy$ abhängende Function, welche auf $\mathfrak{S}$ überall eindeutig und stetig bleibt, so wird Gleiches auch gelten von den natürlichen Ableitungen dieser Function.

Die Modification, welche bei der Uebertragung des vorhin angeführten Satzes von einer Elementarfläche auf eine Riemann'sche Fläche erforderlich ist, besteht also, wie wir sehen, darin, dass an Stelle der ursprünglichen Ableitungen die natürlichen Ableitungen zu setzen sind.

Es sei, ebenso wie bisher, $\mathfrak{J}$ irgend ein Stück einer Riemann'schen Kugelfläche; ferner mögen

$$(\mathfrak{J},\ x,\ y)$$

und

$$(\mathfrak{E},\ \xi,\ \eta)$$

die beiden Bilder sein, welche dieses Flächenstück zur Zeit seines ursprünglichen und zur Zeit seines natürlichen Zustandes darbietet. Zwischen je zwei correspondirenden Puncten x, y und ξ, η findet dann eine Relation von der in (3) angegebenen Form statt:

$$\xi + i\eta = \varphi(x + iy) \tag{4}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Zufolge der Relation (4) kann man aber auch umgekehrt $x + iy$ als eine Function von $\xi + i\eta$ betrachten. Alsdann ergiebt sich:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0. \tag{6}$$

Wir bezeichnen die Functionaldeterminante von x, y nach ξ, η mit R:

(7) $$\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} = R;$$

alsdann ergiebt sich aus (6):

(8) $$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \eta} &= R,\\ \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} &= R,\\ \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} &= 0.\end{aligned}$$

Ferner folgt aus (6):

(9) $$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= 0,\\ \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= 0.\end{aligned}$$

Es mögen x, y und $x + dx$, $y + dy$ zwei benachbarte Puncte auf $\mathfrak{J}$ sein, ferner mögen ξ, η und $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$ die correspondirenden Puncte auf $\mathfrak{E}$ sein. Die Entfernung der beiden ersten Puncte mag dr, die der beiden letztern $d\varrho$ genannt werden; also

$$dr^2 = dx^2 + dy^2,$$
$$d\varrho^2 = d\xi^2 + d\eta^2.$$

Die Differentiale dx, dy können durch die Differentiale $d\xi$, $d\eta$ in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\,d\eta,$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta,$$

Hieraus aber folgt mit Rücksicht auf (8) augenblicklich:

$$dx^2 + dy^2 = R(d\xi^2 + d\eta^2)$$

d. i.

(10) $$dr = \sqrt{R}\,.\,d\varrho.$$

Wir wollen uns nun auf $\mathfrak{J}$ ein unendlich kleines Dreieck construirt denken; seine drei Seiten seien dr, dr', dr''. Ferner mögen $d\varrho$, $d\varrho'$, $d\varrho''$ die Seiten des correspondirenden Dreiecks auf $\mathfrak{E}$ sein. Zufolge (10) ist dann:

$$\begin{aligned}dr &= \sqrt{R}\,.\,d\varrho,\\ dr' &= \sqrt{R}\,.\,d\varrho',\\ dr'' &= \sqrt{R}\,.\,d\varrho''.\end{aligned}$$

Die beiden Dreiecke sind mithin einander **ähnlich**. Wir haben daher folgenden Satz:

Die beiden Bilder, welche irgend ein Stück einer Riemann'schen Kugelfläche zur Zeit seines ursprünglichen und zur Zeit seines natürlichen Zustandes darbietet, sind in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich.

Es seien U, V, W irgend welche Functionen von x, y, die bei ihrer Ausbreitung auf der betrachteten Riemann'schen Kugelfläche innerhalb des Flächenstückes $\mathfrak{J}$ überall eindeutig sind. Die beiden Bilder, welche dieses Flächenstück sammt den genannten Functionswerthen zur Zeit des ursprünglichen und zur Zeit des natürlichen Zustandes darbietet, mögen bezeichnet werden mit

$$(\mathfrak{J},\ x,\ y,\ U,\ V,\ W)$$

und mit

$$(\mathfrak{E},\ \xi,\ \eta,\ U,\ V,\ W).$$

Die Werthe von U, V, W werden dann in jedem Punct ξ, η **dieselben** sein, wie in dem correspondirenden Punct x, y.

Wir betrachten auf $\mathfrak{J}$ irgend drei einander unendlich nahe Puncte a, b, c, und bezeichnen die correspondirenden Puncte auf $\mathfrak{E}$ mit α, β, γ. Sind U_a, U_b, U_c und U_α, U_β, U_γ die Werthe, welche die Function U in diesen Puncten besitzt, so wird

$$U_a = U_\alpha, \quad U_b = U_\beta, \quad U_c = U_\gamma,$$

mithin

$$(11) \qquad U_b - U_a = U_\beta - U_\alpha$$

sein. Zufolge des letzterhaltenen Satzes (über die Aehnlichkeit der kleinsten Theile) werden die Linienelemente ab, ac proportional sein mit den correspondirenden Linienelementen $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$; also:

$$(12) \qquad \frac{ac}{ab} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta}.$$

Aus (11) und (12) folgt nun unmittelbar:

$$(13) \qquad \frac{U_b - U_a}{ab} \cdot ac = \frac{U_\beta - U_\alpha}{\alpha\beta} \cdot \alpha\gamma.$$

Der Quotient $\frac{U_b - U_a}{ab}$ ist nichts Anderes, als der **Differential-Quotient** von U **nach der Richtung** ab, und kann daher, wenn man das Linienelement ab gleich dr setzt, bezeichnet werden mit $\frac{dU}{dr}$. Desgleichen wird der Quotient $\frac{U_\beta - U_\alpha}{\alpha\beta}$, falls man

das Linienelement $\alpha\beta$ gleich $d\varrho$ setzt, zu bezeichnen sein mit $\frac{dU}{d\varrho}$. Thut man dies, und setzt man ausserdem ac gleich dr', und $\alpha\gamma$ gleich $d\varrho'$, so gewinnt die Formel (13) folgendes Aussehen:

$$(14)\qquad \frac{dU}{dr}\,.\,dr' = \frac{dU}{d\varrho}\,.\,d\varrho'$$

Der dem ursprünglichen Zustande zugehörige Ausdruck $\frac{dU}{dr}\,dr'$ ist also ebenso gross, wie der correspondirende Ausdruck für den natürlichen Zustand; es kann demnach dieser Ausdruck eine **Invariante** genannt werden.

Hiebei sind zahlreiche Specialfälle zu erwähnen. Wir können z. B. für dr ein mit der x Achse paralleles Linienelement dx, und gleichzeitig für dr' ein mit der yAchse paralleles dy nehmen; für $d\varrho$, $d\varrho'$ werden dann die mit dx, dy correspondirenden Linienelemente $d\xi$, $d\eta$ zu setzen sein. Die Formel (14) verwandelt sich daher in diesem Fall in $\frac{\partial U}{\partial x}\,dy = \frac{\partial U}{\partial \xi}\,d\eta$. In ähnlicher Weise ergeben sich sämmtliche Formeln des nachfolgenden Systemes:

$$(15)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial x}\,dx = \frac{\partial U}{\partial \xi}\,d\xi, &\qquad &\frac{\partial U}{\partial x}\,dy = \frac{\partial U}{\partial \xi}\,d\eta,\\ &\frac{\partial U}{\partial y}\,dy = \frac{\partial U}{\partial \eta}\,d\eta, &\qquad &\frac{\partial U}{\partial y}\,dx = \frac{\partial U}{\partial \eta}\,d\xi,\\ &\frac{dU}{ds}\,ds = \frac{dU}{d\sigma}\,d\sigma, &\qquad &\frac{dU}{dn}\,ds = \frac{dU}{d\nu}\,d\sigma. \end{aligned}$$

In den beiden letzten sollen unter ds und $d\sigma$ zwei correspondirende Elemente der Randcurven von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{C}$ verstanden werden; gleichzeitig sollen dn und $d\nu$ die auf ds und $d\sigma$ errichteten innern Normalen vorstellen.

Aus (15) ergeben sich nun weitere Formeln durch Integration, so z. B. folgende:

$$(16)\qquad \int_{\mathfrak{J}} \frac{dU}{ds}\,ds = \int_{\mathfrak{C}} \frac{dU}{d\sigma}\,d\sigma,$$

$$(17)\qquad \int_{\mathfrak{J}} \frac{dU}{dn}\,ds = \int_{\mathfrak{C}} \frac{dU}{d\nu}\,d\sigma,$$

wo die Integration links um den Rand von $\mathfrak{J}$, die rechts um den von $\mathfrak{C}$ einmal herumläuft.

Die Ausdrücke (15) und die Integrale (16), (17) sind also ebenfalls **Invarianten.**

Wir werden sogleich noch andere Invarianten kennen lernen. Da U eine Function von x, y ist, und x, y ihrerseits abhängig sind von ξ, η, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi},$$
$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta},$$

oder mit Rücksicht auf (6):

$$(18)\qquad \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \eta},\qquad \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \xi}.$$

Ebenso erhält man für die Function V die Gleichungen.

$$(18\text{a.})\qquad \frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \eta},\qquad \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \xi}.$$

Erhebt man die Gleichungen (18) zum Quadrat, und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf (8):

$$(19)\qquad \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2 = R\,.\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\}.$$

Ferner ergiebt sich, wenn man die Gleichungen (18) und (18a.) mit einander multiplicirt, und dabei wiederum Rücksicht nimmt auf (8):

$$(20)\qquad \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \eta} = R\,.\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

$$(21)\qquad \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \xi} = R\,.\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right).$$

Endlich ergiebt sich, wenn man zu den zweiten Differentialquotienten übergeht, und die Formeln (6), (7), (8), (9) benutzt, mit leichter Mühe:

$$(22)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = R\,.\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right).$$

Nun ist zufolge (10): $R = \frac{dr^2}{d\varrho^2}$. Substituirt man diesen Werth in die Formeln (19), (20), (21), (22), so gewinnen dieselben folgendes Aussehen:

(23) $$\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\} dr^2 = \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2\right\} d\varrho^2,$$

(24) $$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right) dr^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}\right) d\varrho^2,$$

(25) $$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right) dr^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) d\varrho^2,$$

(26) $$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) dr^2 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) d\varrho^2.$$

Die in diesen vier Formeln enthaltenen Ausdrücke sind also ebenfalls **Invarianten.**

Da W eine Function von x, y vorstellen soll, und x, y ihrerseits abhängig sind von ξ, η, so ist bekanntlich

(27) $$\int\!\!\int W\,dx\,dy = \int\!\!\int W R\,d\xi\,d\eta,$$

vorausgesetzt, dass man unter R nach wie vor die Functionaldeterminante von x, y nach ξ, η versteht. Die Grenzen der Integration sind hier beliebig; nur muss das Integrationsgebiet des einen Integrales correspondiren mit dem des andern. Wir werden demnach das eine Integral über $\mathfrak{J}$, das andere über $\mathfrak{E}$ hinerstrecken können; also:

(28) $$\int\!\!\int_{\mathfrak{J}} W\,dx\,dy = \int\!\!\int_{\mathfrak{E}} W R\,d\xi\,d\eta.$$

Nehmen wir nun an Stelle der beliebigen Function W successive die Ausdrücke:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y},$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

so erhalten wir, mit Rücksicht auf (19), (20), (21), (22), folgende Formeln:

(29) $$\int\!\!\int_{\mathfrak{J}}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy = \int\!\!\int_{\mathfrak{E}}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2\right\} d\xi\,d\eta,$$

(30) $$\int\!\!\int_{\mathfrak{J}}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right\} dx\,dy = \int\!\!\int_{\mathfrak{E}}\left\{\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}\right\} d\xi\,d\eta,$$

$$(31)\quad \iint\limits_{\mathfrak{J}}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right\}dx\,dy=\iint\limits_{\mathfrak{E}}\left\{\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \eta}-\frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \xi}\right\}d\xi\,d\eta,$$

$$(32)\quad \iint\limits_{\mathfrak{J}}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right\}dx\,dy=\iint\limits_{\mathfrak{E}}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right\}d\xi\,d\eta.$$

Die in diesen vier Formeln aufgeführten Integrale sind demnach wiederum **Invarianten.**

Dritter Abschnitt. Functionen von $x + iy$, welche auf irgend einem Stück einer Riemann'schen Kugelfläche stetig sind, und deren reelle Theile am Rande dieses Flächenstücks vorgeschriebene Werthe besitzen sollen.

Es sei, ebenso wie bisher, $\mathfrak{J}$ irgend ein Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, welcher sich durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzen lässt. Ferner sei U irgend eine reelle Function von x, y, welche auf $\mathfrak{J}$ ausgebreitet, und daselbst überall eindeutig ist. Diese Function U mag von veränderlicher Gestalt, und nur dadurch gebunden sein, dass sie am Rande von $\mathfrak{J}$ gegebene Werthe, und im Innern von $\mathfrak{J}$ stetig sein soll. Das über $\mathfrak{J}$ ausgedehnte Integral

$$(1)\quad \iint\limits_{\mathfrak{J}}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$

kann, weil U reell sein soll, niemals negativ werden. Unter den verschiedenen Gestalten, welche U annehmen kann, muss demnach eine existiren, für welche das Integral am kleinsten ist. Diese specielle Gestalt von U mag u heissen; u wird dann eine gewisse Function von x, y sein, welche unveränderlich ist.

Das Integral (1) ist, wie wir vorhin gefunden haben (S. 28), eine Invariante. Bezeichnen wir also die beiden Bilder, welche das Flächenstück $\mathfrak{J}$ sammt den darauf ausgebreiteten Functionswerthen U zur Zeit des ursprünglichen und zur Zeit des natürlichen Zustandes darbietet, mit

$$(\mathfrak{J},\ x,\ y,\ U)$$

und mit

$$(\mathfrak{E},\ \xi,\ \eta,\ U)$$

so wird dss Integral (1) von gleichem Werth sein mit folgendem.

$$(2) \qquad \iint\limits_{\mathfrak{E}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2 \right\} d\xi\, d\eta.$$

Dieses über die Elementarfläche $\mathfrak{E}$ hinerstreckte Integral (2) wird demnach, ebenso wie das Integral (1), für die Function u kleiner sein, als für jede andere Function U, welche am Rande von $\mathfrak{E}$ mit u gleichwerthig und im Innern von $\mathfrak{E}$ stetig ist. Aus einem früheren Satz (S. 16) ergiebt sich daher

I. dass die Function u sammt all' ihren Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$, .. auf $\mathfrak{E}$ stetig ist,

II. dass $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ auf $\mathfrak{E}$ überall $= 0$ ist.

Diese Eigenschaften der Function u beziehen sich zunächst nur auf das **natürliche** Bild

$$(\mathfrak{E},\ \xi,\ \eta,\ u).$$

Will man dieselben übertragen auf das **ursprüngliche** Bild

$$(\mathfrak{J},\ x,\ y,\ u),$$

so ist zunächst zu bemerken, dass der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) d\varrho^2$$

eine **Invariante** ist (S. 28). Dieser Ausdruck ist zufolge der II. Eigenschaft innerhalb $\mathfrak{E}$ überall $=0$. Demnach wird der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dr^2$$

überall 0 sein auf $\mathfrak{J}$. Die II. Eigenschaft kann also unmittelbar übertragen werden auf das ursprüngliche Bild.

Nicht so die I. Eigenschaft. Betrachtet man z. B. die Formeln

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

so zeigt sich, dass die Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ für sich allein die Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ noch keineswegs nach sich zieht, dass nämlich $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ nur dann stetig sein werden, wenn ausser den Grössen $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ gleichzeitig auch $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ stetig sind.

Letzteres ist aber, wie leicht zu übersehen, **im Allgemeinen keineswegs der Fall.**

Bei Aussprache der I. Eigenschaft werden wir also in Gedanken immer zurückgehen müssen auf das natürliche Bild. Der Kürze willen bedienen wir uns dabei des bereits früher (S. 22) eingeführten Namens, und nennen

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \ldots$$

die natürlichen Ableitungen, zur Unterscheidung von den ursprünglichen Ableitungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots$$

Wir gelangen alsdann zu folgendem Resultat:

Versteht man unter $\mathfrak{J}$ irgend ein Stück einer Riemann'schen Kugelfläche, welches ohne Zerschneidung, nämlich allein durch stetige Umformung, in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann, und sind x, y die zu diesem Flächenstück gehörigen Puncte, so wird unter allen auf reelle Weise von x, y abhängenden Functionen U, welche am Rande von $\mathfrak{J}$ gegebene Werthe besitzen, und im Innern von $\mathfrak{J}$ stetig sind, eine existiren, für welche das Integral

$$\iint_{\mathfrak{J}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

oder

$$\Pi_{\mathfrak{J}}(U)$$

am kleinsten ist. Diese specielle Function U, sie mag u heissen, ist ausgezeichnet durch folgende Eigenschaften:

I. *Die Function u und all ihre natürlichen Ableitungen sind innerhalb $\mathfrak{J}$ stetig.*

II. *Der Ausdruck* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *ist innerhalb $\mathfrak{J}$ überall* $= 0$.

Es wird sich leicht zeigen lassen, dass dieser Satz ausdehnbar ist auf jeden beliebigen Theil einer Riemann'schen Kugelfläche.

Wir wollen uns einen solchen Flächentheil gegeben denken, und denselben mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen. Aus wie vielen Blättern $\mathfrak{S}$ besteht, wie viele Windungspuncte $\mathfrak{S}$ enthält, wie viele Randcurven $\mathfrak{S}$ besitzt, soll ganz gleichgültig sein.

Die zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Puncte mögen mit x, y bezeichnet werden. Ferner sei U eine von x, y abhängende reelle Function von veränderlicher Gestalt; dieselbe mag nur dadurch gebunden sein, dass sie am Rande von $\mathfrak{S}$ gegebene Werthe besitzen, und im Innern von $\mathfrak{S}$ stetig sein soll. Das über $\mathfrak{S}$ ausgedehnte Integral

$$\iint_{\mathfrak{S}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

oder

$$\Pi_{\mathfrak{S}}(U)$$

kann niemals negativ werden. Unter den verschiedenen Gestalten, deren U fähig ist, muss demnach eine existiren, für welche das Integral am kleinsten ist. Diese specielle Gestalt von U mag u heissen.

Betrachten wir u als die primitive Gestalt der Function U, so wird also das Integral $\Pi_{\mathfrak{S}}(U)$ jederzeit wachsen, sobald sich die Function U durch irgend welche Schwankungen von ihrer primitiven Gestalt entfernt, gleichgültig ob diese Schwankungen totale oder partielle sind.

Es sei p ein beliebiger Punct auf $\mathfrak{S}$, ferner sei $\mathfrak{J}$ ein um diesen Punct herum abgegrenztes Flächenstück von solcher Beschaffenheit, dass es ohne Zerschneidung, nämlich allein durch stetige Umformung, in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann. Das nach Absonderung von $\mathfrak{J}$ noch übrig bleibende Stück von $\mathfrak{S}$ mag $\mathfrak{A}$ heissen.

Wir beschränken die Beweglichkeit der veränderlichen Function U auf das Flächenstück $\mathfrak{J}$. Der auf $\mathfrak{A}$ ausgebreitete Theil von U soll also verharren in seiner primitiven durch u ausgedrückten Gestalt. Der auf $\mathfrak{J}$ ausgebreitete bewegliche Theil von U wird alsdann am Rande von $\mathfrak{J}$ beständig seine primitiven Werthe beizubehalten gezwungen sein; im Innern von $\mathfrak{J}$ wird er alle möglichen Werthe annehmen dürfen, die mit jenen Randwerthen und unter einander stetig zusammenhängen.

Das Integral $\Pi_{\mathfrak{S}}(U)$ wächst jederzeit, sobald sich die Function von ihrer primitiven Gestalt entfernt. Es besteht aber dieses

Integral, wenn wir die Beweglichkeit der Function in der angegebenen Weise beschränken, aus zwei Gliedern:

$$\underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(U) = \underset{\mathfrak{A}}{\Pi}(U) + \underset{\mathfrak{J}}{\Pi}(U),$$

von welchen das erste constant bleibt. Es muss demnach in diesem Fall das Wachsen des Integrales seinen Grund haben in einem Wachsen des zweiten Gliedes. Dieses zweite Glied wird also am kleinsten sein, so lange sich die Function in ihrer primitiven Gestalt befindet. Mit andern Worten:

Das Integral $\underset{\mathfrak{J}}{\Pi}$ ist für die Function u kleiner als für jede andere Function U, welche am Rande von $\mathfrak{J}$ gleichwerthig mit u, und im Innern von $\mathfrak{J}$ stetig ist. Zufolge des vorhergehenden Satzes (S. 31) ist daher u eine Function, welche innerhalb $\mathfrak{J}$ die dort angegebenen Eigenschaften I, II besitzt. $\mathfrak{J}$ repräsentirt aber das Bereich eines auf dem gegebenen Flächentheil $\mathfrak{S}$ beliebig gewählten Punctes p. Demnach werden jene Eigenschaften I, II, da sie für das Bereich von p gelten, auch gelten für das Bereich eines jeden andern Punctes, also gelten für den ganzen Flächentheil $\mathfrak{S}$. Folglich:

Ist $\mathfrak{S}$ ein ganz beliebiger Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, und sind x, y die zu diesem Flächentheil gehörigen Puncte, so wird unter allen von x, y auf reelle Weise abhängenden Functionen U, welche am Rande von $\mathfrak{S}$ gegebene Werthe besitzen und im Innern von $\mathfrak{S}$ stetig sind, eine existiren, für welche das Integral

$$\iint_{\mathfrak{S}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

oder

$$\underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(U)$$

am kleinsten ist. Diese specielle Function U, sie mag u heissen, ist ausgezeichnet durch folgende Eigenschaften:

I. *Die Function u und all' ihre natürlichen Ableitungen sind innerhalb $\mathfrak{S}$ stetig;*

II. *Der Ausdruck* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *ist innerhalb $\mathfrak{S}$ überall* $= 0$.

Wir gehen in der hier begonnenen Untersuchung weiter vorwärts. $\mathfrak{S}$ und u sollen demnach dieselben Bedeutungen behalten, wie in dem soeben ausgesprochenen Satz.

Das in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{S}$ herumerstreckte Integral

$$(1)\qquad T_{\mathfrak{S}} = \int_{\mathfrak{S}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\right)$$

lässt sich, wenn man die Fläche $\mathfrak{S}$ durch irgend welche Schnitte in eine Anzahl einzelner Stücke $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, ... zersplittert, folgendermassen darstellen:

$$(2)\qquad T_{\mathfrak{S}} = T_{\mathfrak{J}_1} + T_{\mathfrak{J}_2} + T_{\mathfrak{J}_3} + \ldots,$$

wo jedes der Integrale rechts um eines der Flächenstücke $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, ... in positiver Richtung herumläuft. Wir denken uns diese Flächenstücke der Art gewählt, dass jedes derselben durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann, und bezeichnen die beiden Bilder, welche das Flächenstück $\mathfrak{J}_\varkappa$ zur Zeit seines ursprünglichen und zur Zeit seines natürlichen Zustandes darbietet, mit

$$(\mathfrak{J}_\varkappa,\ x,\ y,\ u),$$

und mit

$$(\mathfrak{E}_\varkappa,\ \xi,\ \eta,\ u).$$

Das zu $\mathfrak{J}_\varkappa$ gehörige Integral lautet:

$$(3)\qquad T_{\mathfrak{J}_\varkappa} = \int_{\mathfrak{J}_\varkappa} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\right).$$

Dieses Integral ist (vergl. S. 26) eine Invariante, und kann demnach auch so dargestellt werden:

$$(4)\qquad T_{\mathfrak{J}_\varkappa} = \int_{\mathfrak{E}_\varkappa} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\,d\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta}\,d\xi\right).$$

Die Function u besitzt die Eigenschaften I, II. Daraus folgt **erstens**, dass $\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}$ auf der Fläche $\mathfrak{E}_\varkappa$ überall stetig sind, und **zweitens**, dass $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ist, dass mithin $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ ebenfalls $= 0$ ist. Der in (4) unter dem Integralzeichen befindliche Ausdruck

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}\, d\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta}\, d\xi$$

ist demnach ein Differential, welches auf der Elementarfläche $\mathfrak{F}_\varkappa$ überall stetig und vollständig ist. Zufolge eines bekannten Satzes (Vorl. S. 70) hat demnach jenes Integral (4) den Werth Null. Also:

(5) $$T_{\mathfrak{F}_\varkappa} = 0.$$

Somit ergiebt sich aus (2):

(6) $$T_{\mathfrak{S}} = 0.$$

Offenbar würde sich ein ganz ähnliches Resultat auch dann ergeben haben, wenn wir nicht die ganze Fläche $\mathfrak{S}$, sondern irgend ein Stück derselben betrachtet hätten. Wir gelangen demnach zu folgendem Ausspruch:

(7) .... *Betrachtet man irgend welches Stück der Fläche $\mathfrak{S}$, so wird das in positiver Richtung um den Rand dieses Stückes herumlaufende Integral*

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\right)$$

jederzeit gleich Null sein.

Wir wollen uns die Fläche $\mathfrak{S}$ durch Ausführung irgend welcher Schnitte L in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt denken, und diese einfach zusammenhängende Fläche mit $\mathfrak{S}'$ bezeichnen. Auf $\mathfrak{S}'$ denken wir uns irgend zwei Puncte s und p, von welchen der erstere fest, der letztere beweglich sein soll. Endlich bezeichnen wir mit K eine beliebige reelle Constante; und bilden folgendes Integral:

(8) $$v = K + \int_s^p \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\right).$$

Die Bahn $s \ldots p$ dieses Integrales soll auf die Fläche $\mathfrak{S}'$ beschränkt sein, die Schnitte L also nirgends überschreiten dürfen; sonst aber soll sie, abgesehen von ihrem festen Anfangspunct s, sich nach Willkühr bewegen können.

Es seien σ' und σ'' zwei solche Bahnen, welche von s aus nach ein und demselben Punct p hinlaufen; und gleichzeitig mögen v' und v'' die beiden Werthe sein, mit welchen das Integral v je nach Durchlaufung von σ' oder σ'' im Puncte p eintrifft. Die beiden Bahnen σ' und σ'' werden zusammengenommen eine einzige in sich zurücklaufende Curve bilden; und zwar eine Curve, welche ihrem ganzen Laufe nach innerhalb $\mathfrak{S}'$ liegt. $\mathfrak{S}'$ ist aber eine einfach zusammenhängende Fläche; und eine einfach zusammenhängende Fläche wird (Vorl. S. 295) jederzeit in zwei von einander völlig getrennte Stücke zerlegt, sobald man in ihrem Innern eine in sich zurücklaufende Curve construirt. Demnach wird die Fläche $\mathfrak{S}'$ durch die in sich zurücklaufende Curve $\sigma' + \sigma''$ in zwei getrennte Stücke zerfallen, und zwar in ein inneres Stück $\mathfrak{S}_i'$, welches nur von jener Curve begrenzt ist, und in ein äusseres Stück $\mathfrak{S}_a'$, welches theils durch die Curve, theils durch den ursprünglichen Rand von $\mathfrak{S}'$ begrenzt ist.

Die Differenz

$$v' - v''$$

ist offenbar nichts Anderes, als das um den Rand des Stückes $\mathfrak{S}_i'$ in positiver Richtung herumlaufende Integral

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\right);$$

zufolge (7) also gleich Null. Somit ergiebt sich:

$$v' = v''.$$

Der Werth, mit welchem das von s auslaufende und in seiner Bewegung auf die Fläche $\mathfrak{S}'$ beschränkte Integral v in irgend einem Punct p eintrifft, ist also unabhängig von der durchlaufenen Bahn, d. h. allein abhängig von der Lage des Punctes p. Sind mithin x, y die Coordinaten dieses Punctes, so wird v eine Function von x, y sein, welche innerhalb $\mathfrak{S}'$ überall eindeutig ist.

Es lässt sich nun auch leicht zeigen, dass der Werth dieser Function sich stetig ändert, sobald der Punct p oder x, y in irgend welche Bewegung versetzt wird.

Der Punct p habe augenblicklich auf der Fläche $\mathfrak{S}'$ irgend welche beliebige Lage p_0. Wir lassen ihn von hier aus auf beliebigem Wege fortrücken, bis er in eine benachbarte Lage p_1



gelangt. Während dieser Bewegung wird das Integral v einen Zuwachs erhalten, welcher gleich

(9) $$\int_{p_0}^{p_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\right)$$

ist. Denken wir uns um die Puncte p_0, p_1 herum ein kleines Flächenstück $\mathfrak{J}$ abgegrenzt, und bezeichnen wir die beiden Bilder, welche dieses Flächenstück in seinem ursprünglichen und in seinem natürlichen Zustande darbietet, mit

$$(\mathfrak{J},\ x,\ y,\ p_0,\ p_1,\ u)$$

und mit

$$(\mathfrak{E},\ \xi,\ \eta,\ \pi_0,\ \pi_1,\ u),$$

so wird das Integral (9) von gleichem Werth sein mit folgendem Integral (vergl. S. 26):

(10) $$\int_{\pi_0}^{\pi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\,d\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta}\,d\xi\right).$$

Dieses letztere hat seine Bahn auf der Elementarfläche $\mathfrak{E}$, hat nämlich zur Bahn diejenige Linie $\pi_0 \ldots \pi_1$, welche auf $\mathfrak{E}$ mit der Linie $p_0 \ldots p_1$ correspondirt. Nun sind $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, weil u die Eigenschaften I, II besitzt, auf $\mathfrak{E}$ überall stetig, mithin auch überall endlich. Das Integral (10) wird daher, falls π_1 unendlich nahe an π_0 liegt, unendlich klein sein. Demnach wird Analoges von dem gleichwerthigen Integral (9) gelten; dasselbe wird unendlich klein sein, sobald p_1 unendlich nahe an p_0 liegt. Mit andern Worten: Das Integral v wird bei einer unendlich kleinen Verrückung des Punctes p jederzeit einen unendlich kleinen Zuwachs erhalten; während sich also der Punct p beliebig bewegt, wird sich der Werth von v Schritt für Schritt auf stetige Weise ändern.

Wir gelangen somit zu folgendem Ausspruch:

(11) . . . *Das von einem festen Punct s auslaufende und in seiner Bewegung auf die einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{S}'$ beschränkte Integral*

$$v = K + \int_{s}^{p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\right)$$

repräsentirt, falls man unter x, y die Coordinaten des Punctes p versteht, eine von x, y abhängende Function, welche innerhalb $\mathfrak{S}'$ überall eindeutig und stetig ist.

Die Schnitte L, durch welche $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}'$ verwandelt wurde, werden zusammengenommen irgend welches Netz von Schnitten bilden. Dieses Netz wird sich zerlegen lassen in einzelne Schnittstrecken, von welchen jede für sich allein betrachtet unverzweigt ist. Es sei l irgend eine derartige Schnittstrecke; ferner mögen α_1, α_2 irgend zwei Puncte sein, die zu beiden Ufern von l einander gegenüberliegen; und endlich mag β_1, β_2 ein anderes Paar solcher Puncte vorstellen.

Wir bezeichnen die Werthe, welche die eindeutige Function v in diesen Puncten annimmt, mit $v(\alpha_1)$, $v(\alpha_2)$, $v(\beta_1)$, $v(\beta_2)$. Wenn α_1 und β_1 beide auf demselben Ufer von l sich befinden, so wird sich von dem festen Puncte s aus eine zuerst nach α_1 und dann von hier aus längs l nach β_1 laufende Curve ziehen lassen, welche ihrem ganzen Laufe nach innerhalb $\mathfrak{S}'$ bleibt, welche nämlich das Schnittnetz nirgends überschreitet. $v(\alpha_1)$ wird alsdann derjenige Werth sein, mit welchem das von s aus, dieser Curve entlang laufende Integral v in α_1 eintrifft; und $v(\beta_1)$ derjenige, mit welchem das Integral bei noch weiterem Fortlaufen auf der genannten Curve im Punct β_1 anlangt. Somit ergiebt sich:

$$(12)\qquad v(\beta_1) - v(\alpha_1) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx \right),$$

wo die Integration von α_1 bis β_1 längs jener Curve, d. h. längs der Schnittstrecke l fortschreitet; denn jene Curve sollte auf ihrem Wege von α_1 nach β_1 mit der Schnittstrecke l zusammenfallen. In gleicher Weise wird sich offenbar ergeben:

$$(13)\qquad v(\beta_2) - v(\alpha_2) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx \right),$$

wo die Integrationen von α_2 bis β_2 wiederum längs l, aber auf dem andern Ufer von l fortläuft.

Auf der noch unversehrten Fläche $\mathfrak{S}$ besass u die Eigenschaften I, II. Demnach wird der Werth von u in je zwei Puncten, welche zu beiden Ufern der Schnittstrecke l einander gegen-

über liegen, ein und derselbe sein. Die beiden Integrale in (12) und (13) sind daher von gleichem Werth. Folglich:

$$v(\beta_1) - v(\alpha_1) = v(\beta_2) - v(\alpha_2),$$

oder was desselbe ist:

(14) $$v(\alpha_2) - v(\alpha_1) = v(\beta_2) - v(\beta_1).$$

Hieraus folgt, dass v zu beiden Ufern der Schnittstrecke l Werthe besitzt, deren Differenz längs der Schnittstrecke hin überall gleich gross ist.

Es bleiben schliesslich in Betreff der Function v noch einige einfache Bemerkungen übrig.

Zuvörderst: die Function v enthält eine willkührliche Constante K. Diese Constante wird also der Art bestimmt werden können, dass die Function v in irgend einem Punct der Fläche $\mathfrak{S}'$ einen vorgeschriebenen Werth annimmt.

Ferner: Aus (11) folgt:

$$dv = \frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx;$$

und hieraus ergiebt sich:

(15) $$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass das Binom $u + iv$ nicht von x, y, sondern nur von $x + iy$ abhängig ist.

An den vorhergehenden Satz (S. 33) lehnt sich demnach ein anderer Satz an, welcher, wenn wir alles seitdem Bemerkte zusammenfassen, so lautet:

Zweites Theorem.

Versteht man unter $\mathfrak{S}$ einen ganz beliebigen Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, und sind x, y die zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Puncte, so wird sich auf $\mathfrak{S}$ jederzeit eine von $x + iy$ abhängende Function $u + iv$ ausbreiten lassen, welche daselbst, abgesehen von gewissen rein imaginären Werthdifferenzen, überall stetig ist, und deren reeller Theil u am Rande von $\mathfrak{S}$ gegebene Werthe besitzt.

Denkt man sich nämlich die Fläche $\mathfrak{S}$ durch irgend welche Schnitte L in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{S}'$ verwandelt, so wird eine von $x + iy$ abhängende Function $u + iv$ existiren, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. *$u + iv$ ist auf der unversehrten Fläche $\mathfrak{S}$ überall ein-*

deutig, und mit Ausnahme der Linien L daselbst auch überall stetig, in den Linien L aber mit constanten und zwar rein imaginären Werthdifferenzen behaftet.

2. *u hat am Rande von $\mathfrak{S}$ beliebig gegebene Werthe.*

3. *v besitzt in irgend einem einzelnen Punct von $\mathfrak{S}$ einen vorgeschriebenen Werth.*

Zusatz. Es existirt nur eine einzige Function $u + iv$, welche diese Bedingungen erfüllt.

Um die Richtigkeit des angehängten Zusatzes zu erweisen, wollen wir einstweilen annehmen, es existirten zwei Functionen $u + iv$ und $u_1 + iv_1$, welche den gestellten Bedingungen Genüge leisten. Wir bilden die Differenz

(16) $$(u + iv) - (u_1 + iv_1) = \omega + i\vartheta.$$

Der Rand der einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{S}'$ wird gebildet von zwei Arten von Linien, von den Linien l, und von den Linien r. Wir verstehen nämlich unter l jede zu dem Schnittsystem L gehörige unverzweigte Schnittstrecke, andererseits unter r jede Linie, die zum Rande der noch unversehrten Fläche $\mathfrak{S}$ gehört. In Bezug auf die einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{S}'$ wird nun die Differenz $\omega + i\vartheta$ folgende Eigenschaften besitzen:

1. $\omega + i\vartheta$ ist eine von $x + iy$ abhängende Function, welche innerhalb $\mathfrak{S}'$ überall eindeutig und stetig ist.

2. ω ist in jeder Linie r gleich 0. Ferner besitzt $\omega + i\vartheta$ zu beiden Seiten einer jeden Linie l Werthe, deren Differenz der Linie entlang constant und rein imaginär ist.

3. ϑ besitzt in irgend einem einzelnen Punct von $\mathfrak{S}'$ den Werth 0.

Wir betrachten das in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{S}'$ herumlaufende Integral

(17) $$\int_{\mathfrak{S}'} \omega\, d\vartheta.$$

Bei einer positiven Umlaufung der Fläche $\mathfrak{S}'$ wird jede Linie r einmal, andrerseits jede Linie l zweimal und zwar in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen. Zerlegen wir demnach das Integral (17) den Linien r und l entsprechend in einzelne Theile, so wird der zu r gehörige Theil lauten:

(18) $$\int\limits_r \omega\, d\vartheta,$$

der zu l gehörige Theil hingegen folgende Gestalt haben:

(19) $$\int\limits_l (\omega_1\, d\vartheta_1 - \omega_2\, d\vartheta_2).$$

Die Integrationen sind hier respective längs r und längs l hinerstreckt zu denken. Ferner sind unter ω_1, ϑ_1 diejenigen Werthe zu verstehen, welche die Functionen ω, ϑ auf der einen Seite von l besitzen, und unter ω_2, ϑ_2 diejenigen, welche dieselben auf der andern Seite von l haben.

Zufolge der 2. Eigenschaft ist ω in der Linie r gleich 0. Demnach ist der Integraltheil (18) ebenfalls gleich 0.

Zufolge der 2. Eigenschaft ist ferner, was den Integraltheil (19) anbelangt:

$$\omega_1 = \omega_2, \qquad \vartheta_1 = \vartheta_2 + \text{Const.},$$

mithin:

$$\omega_1 = \omega_2, \qquad d\vartheta_1 = d\vartheta_2.$$

Demnach ist der Integraltheil (19) ebenfalls gleich 0.

Wir sehen also, dass das Integral (17) aus einzelnen Theilen besteht, die sämmtlich gleich 0 sind; und erhalten daher die Formel:

(20) $$\int\limits_{\mathfrak{S}'} \omega\, d\vartheta = 0.$$

Beachtet man diese Formel, und beachtet man ferner, dass $\omega + i\vartheta$ innerhalb $\mathfrak{S}'$ überall eindeutig und stetig ist, so ergiebt sich zufolge eines bekannten Satzes (Vorl. S. 278) augenblicklich, dass der Werth von $\omega + i\vartheta$ auf $\mathfrak{S}'$ allenthalben constant ist. Dieser constante Werth kann aber, weil ω in den Linien r gleich 0, und ϑ in einem einzelnen Punct der Fläche gleich 0 ist, kein anderer als der Werth 0 sein.

Somit haben wir nachgewiesen, dass die Differenz $\omega + i\vartheta$ nothwendigerweise $= 0$ ist; mit andern Worten, dass immer nur eine einzige Function $u + iv$ existiren kann, welche die in dem Theorem angegebenen Eigenschaften besitzt.

Vierter Abschnitt. Functionen von $x + iy$, welche auf einer Riemann'schen Kugelfläche mit vorgeschriebenen linearen Unstetigkeiten behaftet sein sollen.

Es sei $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche. Wir führen auf derselben irgend einen in sich zurücklaufenden Schnitt λ aus, durch welchen die Fläche nicht in getrennte Stücke zerfällt. Die beiden Ufer des Schnittes λ mögen bezeichnet werden mit λ_1 und λ_2. Alsdann wird sich die Fläche $\mathfrak{R}$ durch Ausführung jenes Schnittes in eine Fläche $\mathfrak{S}$ verwandeln, welche zwei Randcurven besitzt, nämlich die Curven λ_1 und λ_2.

Wir denken uns nun auf der Fläche $\mathfrak{S}$ eine von x, y auf reelle Weise abhängende Function U ausgebreitet, welche am Rande von $\mathfrak{S}$, d. i. in den Curven λ_1 und λ_2 gegebene Werthe besitzt, und welche ferner im Innern von $\mathfrak{S}$ folgende Eigenschaften hat:

I. Die Function U ist sammt ihren natürlichen Ableitungen innerhalb $\mathfrak{S}$ überall stetig.

II. Der Ausdruck $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ ist innerhalb $\mathfrak{S}$ überall $= 0$.

Eine solche Function wird, mögen nun die gegebenen Randwerthe beschaffen sein, wie sie wollen, jederzeit existiren (Satz Seite 33).

Längs der Curve λ denken wir uns eine reelle und stetig zusammenhängende Werthenreihe F aufgepflanzt. Diese Werthenreihe F soll die auf dem einen Ufer von λ gegebenen Randwerthe repräsentiren; und gleichzeitig soll die Werthenreihe $F + C$ diejenigen Randwerthe darstellen, welche für das andere Ufer von λ gegeben; dabei soll unter C eine gegebene reelle Constante verstanden werden.

Wir bezeichnen nämlich die Randwerthe der Function U auf den Curven λ_1 und λ_2 respective mit U_1 und U_2, und setzen fest, dass

$$\text{längs } \lambda_1: \quad U_1 = F,$$
$$\text{längs } \lambda_2: \quad U_2 = F + C$$

sein soll.

Die Constante C mag unveränderlich gegeben sein. Die Werthenreihe F hingegen mag von veränderlicher Gestalt, und

nur der einen Bedingung unterworfen sein, dass ihre Werthe längs λ stetig mit einander zusammenhängen sollen. Die Function U ist gebunden an die durch F dargestellten Randbedingungen; ändert sich also F, so wird sich gleichzeitig auch U ändern.

Es mögen durch $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$, ... alle überhaupt denkbaren Gestalten angedeutet sein, deren die Werthenreihe F fähig ist; und gleichzeitig mögen durch $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$, ... die zugehörigen Gestalten von U repräsentirt sein. Unter all diesen verschiedenen Gestalten der Function U wird dann **eine** existiren, für welche das Integral

(1) $$\iint_{\mathfrak{S}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

oder

(1 a.) $$\underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(U)$$

am kleinsten ist. Diese specielle Gestalt von U mag mit u, und gleichzeitig mag die derselben zugehörige specielle Gestalt von F mit f bezeichnet werden.

Unsere Absicht ist, die in solcher Weise bestimmte Function u einer näheren Untersuchung zu unterwerfen.

(2) ... *Dabei wird festzuhalten sein, dass die Functionen u und U am Rande von $\mathfrak{R}'$ folgende Werthe haben:*

$$\text{längs } \lambda_1:\quad u_1 = f, \qquad U_1 = F,$$
$$\text{längs } \lambda_2:\quad u_2 = f + C, \quad U_2 = F + C;$$

ferner, dass u und U innerhalb $\mathfrak{R}'$ die vorhin genannten Eigenschaften I, II *besitzen.*

Setzen wir für den Augenblick $U = u + \delta$, so verwandelt sich das Integral (1) in

$$\underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(u+\delta) = \underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(u) + \underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(\delta) + $$
$$+ 2 \iint_{\mathfrak{S}} \left\{ \frac{\partial \delta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \right\} dx\, dy.$$

Wir erhalten demnach, wenn wir für δ seine eigentliche Bedeutung $U - u$ restituiren, die Formel

(3) $$\underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(U) = \underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(u) + \underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(U-u) + 2\, \underset{\mathfrak{S}}{T},$$

wo das letzte Glied folgenden Werth besitzt:

(4) $$T_{\mathfrak{S}} = \iint_{\mathfrak{S}} \left\{ \frac{\partial(U-u)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(U-u)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dx\, dy.$$

Dieses letztere Integral lässt sich verwandeln in ein Rand-Integral; in folgender Weise:

Wir zerlegen die Fläche $\mathfrak{S}$ durch irgend welche Schnitte in einzelne Schnitte $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3, \ldots$, von welchen jedes durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann. Das Integral (4) verwandelt sich dann zunächst in eine Summe von Integralen, nämlich:

(5) $$T_{\mathfrak{S}} = T_{\mathfrak{J}_1} + T_{\mathfrak{J}_2} + T_{\mathfrak{J}_3} + \ldots$$

Das über $\mathfrak{J}_\varkappa$ hinerstreckte Integral

(6) $$T_{\mathfrak{J}_\varkappa} = \iint_{\mathfrak{J}_\varkappa} \left\{ \frac{\partial(U-u)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(U-u)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dx\, dy$$

ist eine Invariante, also von gleichem Werth mit folgendem Integral

(7) $$\iint_{\mathfrak{E}_\varkappa} \left\{ \frac{\partial(U-u)}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial(U-u)}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\} d\xi\, d\eta,$$

wo unter $\mathfrak{E}_\varkappa$ diejenige Elementarfläche zu verstehen ist, durch welche der natürliche Zustand von $\mathfrak{J}_\varkappa$ dargestellt wird. Nun ist identisch:

$$\frac{\partial(U-u)}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(U-u) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] - (U-u) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial(U-u)}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(U-u) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] - (U-u) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Das Integral (7) geht daher über in:

(8) $$\iint_{\mathfrak{E}_\varkappa} \left\{ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right) - (U-u) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \right\} d\xi\, d\eta,$$

wo α und β zur Abkürzung gesetzt sind für folgende Ausdrücke:

$$\alpha = (U-u) \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\beta = (U-u) \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

U und u sind Functionen, welche auf der Fläche $\mathfrak{R}'$ die Eigenschaften I, II besitzen. Demnach werden die Functionen U, u und ebenso auch ihre natürlichen Ableitungen

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

auf der Elementarfläche $\mathfrak{E}_x$ überall stetig sein; gleiches wird mithin auch von den Grössen α, β gelten. Ferner wird $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, und ebenso $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ auf $\mathfrak{E}_x$ überall $= 0$ sein. Das Integral (8) reducirt sich daher zunächst auf

(9)
$$\iint_{\mathfrak{E}_x} \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta} \right\} d\xi \, d\eta,$$

und verwandelt sich sodann nach bekanntem Satz (Vorl. S. 59) in folgendes Rand-Integral:

(10)
$$-\int_{\mathfrak{E}_x} \left(\alpha \frac{d\xi}{d\nu} + \beta \frac{d\eta}{d\nu} \right) d\sigma.$$

Hier ist $d\sigma$ ein Element der Randlinie von $\mathfrak{E}_x$, und ν die auf $d\sigma$ errichtete innere Normale. Substituirt man für α, β ihre eigentlichen Bedeutungen, so gewinnt das letztgenannte Integral folgendes Aussehen:

(11)
$$-\int_{\mathfrak{E}_x} (U - u) \frac{du}{d\nu} \, d\sigma.$$

Dieses Integral ist aber eine Invariante, also von gleichem Werth mit folgendem:

(12)
$$-\int_{\mathfrak{J}_x} (U - u) \frac{du}{dn} \, ds.$$

Wir erhalten demnach:

(13)
$$T_{\mathfrak{J}_x} = -\int_{\mathfrak{J}_x} (U - u) \frac{du}{dn} \, ds.$$

Aehnliche Werthe ergeben sich natürlich für sämmtliche Integrale $T_{\mathfrak{J}_1}$, $T_{\mathfrak{J}_2}$, $T_{\mathfrak{J}_3}$, ... Substituirt man diese Werthe in die Formel (5), so erhält man schliesslich:

(14) $$\underset{\mathfrak{S}}{T} = -\int_{\mathfrak{S}} (U-u)\,\frac{du}{dn}\,ds.$$

Die Integration ist hier über alle Linienelemente ds hinerstreckt zu denken, aus welchen der Rand von $\mathfrak{R}'$ besteht. Daneben ist unter n die auf ds errichtete innere Normale zu verstehen.[1]

Der Rand von $\mathfrak{S}$ besteht aus zwei Curven, die wir mit λ_1 und λ_2 bezeichnet haben. Demgemäss ist das vorstehende Integral genau genommen ein Aggregat von zwei Integralen; also:

(15) $$\underset{\mathfrak{S}}{T} = -\int_{\lambda} (U_1-u_1)\,\frac{du_1}{dn_1}\,ds_1 - \int_{\lambda} (U_2-u_2)\,\frac{du_2}{dn_2}\,ds_2.$$

Da die beiden Curven λ_1 und λ_2 parallel neben einander herlaufen,[2] so können wir für ds_1 und ds_2 immer je zwei einander gegenüberliegende und gleich grosse Elemente nehmen, so dass $ds_1 = ds_2 = ds$ wird. Ausserdem ist zufolge der angenommenen Randbedingungen:

$$U_1 = F, \qquad u_1 = f,$$
$$U_2 = F + C, \quad u_2 = f + C,$$

mithin:

(16) $$U_1 - u_1 = F - f,$$
$$U_2 - u_2 = F - f.$$

Demnach verwandelt sich die Formel (15) in:

(17) $$\underset{\mathfrak{S}}{T} = -\int_{\lambda} (F-f)\left(\frac{du_1}{dn_1} + \frac{du_2}{dn_2}\right) ds.$$

Die Integration ist hinerstreckt über alle Elemente ds der in sich zurücklaufenden Linie λ. Gleichzeitig sind n_1 und n_2 die auf ds in entgegengesetzten Richtungen construirten Normalen.

Die Formel (3) nimmt nun, wenn wir den Werth (17) substituiren, und wenn wir gleichzeitig die Abkürzung einführen:

(18) $$\frac{du_1}{dn_1} + \frac{du_2}{dn_2} = q$$

folgende Gestalt an:

(19) $$\underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(U) = \underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(u) + \underset{\mathfrak{S}}{\Pi}(U-u) - 2\int_{\lambda} (F-f)\,q\,ds.$$

Was die Bedeutung der hier auftretenden Functionen anbelangt, so müssen wir uns daran erinnern, dass f, u, q unveränderliche Functionen sind, dass hingegen F, U Functionen

von veränderlicher Gestalt vorstellen. Ferner müssen wir uns daran erinnern, dass unter sämmtlichen Gestalten, deren die Function U überhaupt fähig ist, u diejenige repräsentirt, für welche das Integral $\iint_{\mathfrak{S}}$ am kleinsten ist.

Aus der vorstehenden Formel folgt daher, dass der Ausdruck

(20) $$\iint_{\mathfrak{S}} (U-u) - 2\int_{\lambda} (F-f)\, q\, ds$$

niemals negativ werden kann.

Die Differenz $U-u$ ist eine Function, welche, ebenso wie U und u selber, auf der Fläche $\mathfrak{S}$ die Eigenschaften I, II besitzt, und zugleich eine Function, welche, wie aus (16) hervorgeht, am Rande von $\mathfrak{S}$, d. i. zu beiden Ufern von λ, die Werthe $F-f$ besitzt. Diese Werthe $F-f$ sind aber, weil F beliebig verändert werden kann, ebenfalls veränderlich. Setzen wir daher $U-u=\Omega$ und $F-f=\Phi$, so können wir das eben erhaltene Ergebniss auch so aussprechen:

Denkt man sich längs der in sich zurücklaufenden Linie λ eine stetig zusammenhängende Werthenreihe Φ von beliebig veränderlicher Gestalt aufgepflanzt, und versteht man unter Ω eine auf $\mathfrak{S}$ ausgebreitete Function, welche zu beiden Ufern von λ die Werthe Φ, und im Innern von $\mathfrak{S}$ die Eigenschaften I, II *besitzt; so wird der Ausdruck*

(21) $$\iint_{\mathfrak{S}} (\Omega) - 2\int_{\lambda} \Phi\, q\, ds$$

niemals negativ sein.

Hieraus aber folgt, dass die in diesem Ausdruck enthaltene Grösse q an allen Stellen der Linie λ gleich 0 ist. Um solches darzuthun, wollen wir einstweilen das Gegentheil annehmen, also von der Hypothese ausgehen, dass die Werthe, welche q auf der Linie λ besitzt, sämmtlich oder zum Theil von 0 verschieden sind. Wir setzen das willkührlich zu wählende Φ gleich φ, und verstehen dabei unter φ eine Werthenreihe, welche entweder mit q identisch, oder wenigstens an allen Stellen der Linie λ mit q von gleichem Vorzeichen ist. Gleichzeitig bezeichnen wir diejenige Gestalt, welche Ω in diesem Fall annimmt, mit ω. Wir treffen sodann zweitens in Bezug auf Φ eine etwas andere Wahl, setzen nämlich Φ gleich $\varkappa\varphi$, wo $\varkappa$ eine beliebige Constante sein

soll; gleichzeitig wird dann Ω, wie leicht zu übersehen ist, die Gestalt $\varkappa\omega$ annehmen.

Bei dieser letzten Annahme in Betreff von Φ und Ω verwandelt sich der Ausdruck (21) in:

$$\underset{\mathfrak{S}}{\iint} (\varkappa\omega) - 2\int_{\lambda} \varkappa\varphi q ds,$$

d. i. in:

(22) $$\varkappa^2 . \underset{\mathfrak{S}}{\iint} (\omega) - 2\varkappa . \int_{\lambda} \varphi q ds;$$

und diesen wollen wir abkürzend bezeichnen mit

(22 a.) $$\varkappa^2 . \alpha - 2\varkappa . \beta.$$

Zufolge des vorhin erhaltenen Resultates soll nun dieser Ausdruck, in welchem $\varkappa$ eine ganz willkührliche Constante vorstellt, niemals negativ sein dürfen. Das aber ist nicht der Fall. Der Ausdruck hat z. B. für $\varkappa = \frac{\beta}{\alpha}$ den Werth

(23) $$-\frac{\beta^2}{\alpha}.$$

Und dieser Werth ist negativ; denn α ist gleich $\underset{\mathfrak{S}}{\iint}(\omega)$, also (der Bedeutung dieses Integrales zufolge) jederzeit positiv, und β ist gleich $\int_{\lambda} \varphi q ds$, mithin (der über φ gemachten Annahme zufolge) jederzeit von 0 verschieden.

Somit folgt, dass die zu Grunde gelegte Hypothese unrichtig ist, dass also der Werth von q auf der Linie λ nirgends von 0 verschieden sein kann. Erinnern wir uns also an die eigentliche Bedeutung von q (18), so sehen wir, dass längs λ überall die Gleichung stattfindet:

(24) $$\frac{du_1}{dn_1} + \frac{du_2}{dn_2} = 0.$$

Es sei β irgend ein Punct der Linie λ, und $\alpha\beta\gamma$ eine durch β gelegte und gegen λ senkrechte Linie. Die Puncte α und γ liegen dann zu verschiedenen Seiten der Linie; sie mögen ausserdem dem Punct β unendlich nahe sein. Unter diesen Umständen wird:

$$\frac{du_1}{dn_1} = \frac{u_\gamma - u_\beta}{\beta\gamma},$$

$$\frac{du_2}{dn_2} = \frac{u_\alpha - u_\beta}{\alpha\beta},$$

wo die Nenner $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ beide positiv sind, nämlich die Entfernungen der Puncte α, β, γ darstellen. Die Gleichung (24) geht also über in:

(25) $$\frac{u_\alpha - u_\beta}{\alpha\beta} + \frac{u_\gamma - u_\beta}{\beta\gamma} = 0,$$

d. i. in:

(26) $$\frac{u_\beta - u_\alpha}{\alpha\beta} = \frac{u_\gamma - u_\beta}{\beta\gamma}.$$

Bezeichnet man die von α über β nach γ fortlaufende Richtung mit N, so ist $\frac{u_\beta - u_\alpha}{\alpha\beta}$ der Differentialquotient von u nach der Richtung N auf der einen Seite von λ, und $\frac{u_\gamma - u_\beta}{\beta\gamma}$ der Differentialquotient nach ebenderselben Richtung auf der andern Seite von λ. Die Gleichung (26) sagt also, dass der Differentialquotient

(27) $$\frac{du}{dN}$$

zu beiden Seiten der Linie λ gleiche Werthe hat. Zu einem analogen Resultat gelangen wir, wenn wir an Stelle von N eine Richtung nehmen, die senkrecht gegen N steht, also eine Richtung, die zur Curve λ tangential liegt. Die Werthe von u sind nämlich laut (2) auf dem einen Ufer von λ um die gegebene Constante C grösser als auf dem andern. Sind also α, β zwei auf einander folgende Puncte des einen Ufers von λ, und sind a, b die gegenüberliegenden Puncte des andern Ufers, so ist

$$u_\alpha = u_a + C,$$
$$u_\beta = u_b + C,$$

mithin:

$$u_\beta - u_\alpha = u_b - u_a;$$

also, weil die Entfernung $\alpha\beta$ ebenso gross ist wie die Entfernung ab:

(28) $$\frac{u_\beta - u_\alpha}{\alpha\beta} = \frac{u_b - u_a}{ab}.$$

Bezeichnet man aber die von α nach β, oder, was dasselbe ist, die von a nach b fortlaufende Richtung mit T, so sagt die vor-

stehende Gleichung, dass der Differentialquotient

$$(29) \qquad \frac{du}{dT}$$

zu beiden Seiten von λ einerlei Werthe hat.

Es sei p irgend ein Punct der Linie λ. Durch den Punct p denken wir uns drei Richtungen gelegt: erstens die tangentiale Richtung T, zweitens die normale Richtung N, und drittens endlich eine beliebige Richtung R; diese letztere mag mit T den Winkel α, und mit N den Winkel β bilden. Bekanntlich gilt dann (vergl. Vorl. S. 49—53) folgende Formel:

$$(30) \qquad \frac{du}{dR} = \frac{du}{dT} \cos\alpha + \frac{du}{dN} \cos\beta.$$

Die Grössen $\frac{du}{dT}$ und $\frac{du}{dN}$ haben, wie sich vorhin zeigte, zu beiden Seiten von λ einerlei Werthe. Gleiches wird demnach, dieser Formel zufolge, auch gelten von der Grösse $\frac{du}{dR}$. Also:

Versteht man unter R irgend welche, die Linie λ unter beliebigem Winkel durchschneidende Richtung, so ist der Differentialquotient

$$\frac{du}{dR}$$

auf der einen Seite von λ jederzeit ebenso gross wie auf der andern.

Nimmt man für R eine Richtung, welche mit der x Achse oder mit der y Achse parallel läuft, so verwandelt sich bekanntlich der Differentialquotient $\frac{du}{dR}$ in den Differentialquotient $\frac{\partial u}{\partial x}$ oder in den Differentialquotient $\frac{\partial u}{\partial y}$. Diese beiden letztern werden demnach ebenfalls auf beiden Seiten von λ einerlei Werthe besitzen.

Die Werthe, welche $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ zu beiden Seiten von λ besitzen, hängen also in der Linie λ stetig mit einander zusammen. Mit andern Worten: In der Linie λ findet eine Unterbrechung statt in der Stetigkeit der Function u selber, nicht aber in der Stetigkeit ihrer Ableitungen.

Fügen wir dies Ergebniss zu Demjenigen hinzu, was uns bereits von früher (2) über die Function u bekannt war, so haben wir folgenden Satz:

Sind x, y die zu irgend einer Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ gehörigen Puncte, ist ferner λ eine auf dieser Fläche gegebene in sich zurücklaufende Linie, und versteht man endlich unter C eine gegebene reelle Constante, so wird sich jederzeit auf der Fläche $\mathfrak{R}$ eine von x, y auf reelle Weise abhängende Function u ausbreiten lassen, deren Werthe auf der einen Seite von λ um C grösser sind als auf der anderen, deren Ableitungen hingegen zu beiden Seiten von λ gleich gross sind, und welche ausserdem folgende Eigenschaften besitzt:

I. *Die Function u ist sammt ihren natürlichen Ableitungen auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall stetig, abgesehen von der schon erwähnten in λ vorhandenen Unstetigkeit.*

II. *Der Ausdruck $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ist auf $\mathfrak{R}$ überall $= 0$.*

Wir haben diesen Satz im Vorhergehenden eigentlich nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass die Fläche $\mathfrak{R}$ durch die Linie λ nicht in getrennte Stücke zerfällt. Es geschah das nur der Einfachheit willen; man übersieht leicht, dass man auch dann zu diesem Satze gelangen wird, wenn eine Zerstückelung stattfindet, und zwar auf ganz ähnlichem Wege, wie in dem hier betrachtetem Fall. Der Satz hat also allgemeine Gültigkeit.

Wir gehen in der begonnenen Untersuchung weiter vorwärts; $\mathfrak{R}$, λ, u sollen dieselben Bedeutungen behalten, wie bisher.

Mit Ausnahme der Linie λ ist die Function u sammt ihren natürlichen Ableitungen auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall stetig. An der Linie λ findet aber nur in den Werthen der Function u selber, nicht in denen ihrer Ableitungen eine Stetigkeitsunterbrechung statt; denn wir wissen, dass die Ableitungen zu beiden Seiten von λ gleiche Werthe besitzen. Die natürlichen Ableitungen von u sind demnach auf der Fläche $\mathfrak{R}$ **allenthalben** stetig. Ferner ist bekannt, dass der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

auf der Fläche $\mathfrak{R}$ **allenthalben** $= 0$ ist.

Es sei $\mathfrak{J}$ irgend ein Stück der Fläche $\mathfrak{R}$, von solcher Beschaffenheit, dass es durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann. Das in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{J}$ herumerstreckte Integral

(1) $$\int\limits_{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\right)$$

ist eine Invariante, also von gleichem Werth mit folgendem Integral

(2) $$\int\limits_{\mathfrak{E}}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\,d\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta}\,d\xi\right).$$

Hier repräsentirt $\mathfrak{E}$ diejenige Elementarfläche, durch welche der natürliche Zustand von $\mathfrak{J}$ dargestellt wird. Da $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, folglich auch $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ überall $= 0$ sind, so ist der unter dem Integralzeichen befindliche Ausdruck

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}\,d\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta}\,d\xi$$

ein vollständiges Differential. Beachtet man ausserdem, dass die natürlichen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ überall stetig sind, so ergiebt sich (vergl. Vorl. S. 70) sofort, dass das um die Elementarfläche $\mathfrak{E}$ herumlaufende Integral (2) verschwindet, und dass also das Integral (1) ebenfalls verschwindet. Also:

(3) $$\int\limits_{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\right) = 0.$$

Denken wir uns nun ein ganz beliebiges Stück der Fläche $\mathfrak{R}$, so wird dieses jederzeit in kleinere Stücke zerlegt werden können, von denen jedes für sich allein betrachtet durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann. Für jedes dieser kleineren Stücke wird also die Formel (3) Gültigkeit besitzen. Demnach wird sie, wie sich durch Addition der so entstehenden Formeln unmittelbar ergiebt, auch Gültigkeit besitzen für das ganze Flächenstück. Also:

(4) . . . *Betrachtet man irgend welches Stück der Fläche $\mathfrak{R}$, so wird das in positiver Richtung um den Rand dieses Flächenstücks herumlaufende Integral*

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\right)$$

jederzeit $= 0$ sein.

Wir verwandeln nun die Fläche $\mathfrak{R}$ durch Ausführung irgend welcher Schnitte L in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$.

Ob die Schnitte L mit der Linie λ sich durchkreuzen oder nicht, soll ganz gleichgültig sein. Die Linie λ selber soll eben nur als eine auf der Fläche fortlaufende Linie, nicht aber als ein Schnitt angesehen werden. Das von einem festen Punct s auslaufende und in seiner Bewegung auf die einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ beschränkte Integral

(5) $$v = \int_s^p \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\right)$$

wird alsdann, wie sich mit Hülfe von (4) leicht nachweisen lässt (vergl. S. 35 — 37), in jedem gegebenen Punct p immer nur einen Werth besitzen. Es wird also dieses Integral v, wenn man die Coordinaten des Punctes p mit x, y bezeichnet, eine Function von x, y sein, die innerhalb $\mathfrak{R}'$ überall eindeutig ist.

Ferner wird sich (vergl. wiederum S. 35—37) nachweisen lassen, dass diese von x, y abhängende Function v auf der Fläche $\mathfrak{R}'$ überall stetig bleibt, und dass sie in jedem der Schnitte L mit einer constanten Werthdifferenz behaftet ist.

Endlich ergiebt sich aus (5):

(6) $$dv = \frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx,$$

mithin:

(7) $$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hieraus folgt, dass $u + iv$ eine Function von $x + iy$ ist. Der zuletzt gefundene Satz (S. 51) führt demnach, wenn wir alles seitdem Bemerkte zusammenfassen, zu folgendem Theorem:

Drittes Theorem.

Sind x, y die Puncte einer beliebig gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, ist ferner λ eine auf $\mathfrak{R}$ gegebene in sich zurücklaufende Linie, und ist endlich C eine gegebene reelle Constante, so existirt jederzeit eine die ganze Fläche $\mathfrak{R}$ bedeckende, von $x + iy$ abhängende Function $u + iv$, welche längs der Linie λ die Werthdifferenz C besitzt, welche sonst aber, abgesehen von gewissen rein imaginären Werthdifferenzen, auf $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig ist.

Denkt man sich nämlich die Fläche $\mathfrak{R}$ durch irgend welche Schnitte L in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ verwandelt, so wird eine von $x + iy$ abhängende Function $u + iv$ existiren, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. Die Function $u + iv$ ist auf der unversehrten Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig, und mit Ausnahme der Linien λ und L daselbst auch überall stetig.

2. In der Linie λ besitzt sie die gegebene reelle Werthdifferenz C.

3. In den Linien L ist sie mit irgend welchen constanten und zwar rein imaginären Werthdifferenzen behaftet.

4. Sie besitzt in irgend einem einzelnen Punct der Fläche $\mathfrak{R}$ einen vorgeschriebenen Werth.

Zusatz. Es existirt nur eine einzige Function $u + iv$, welche diese Bedingungen erfüllt.

Dass eine den Bedingungen 1, 2, 3 genügende Function existiren muss, folgt unmittelbar aus der vorhergehenden Untersuchung. Ist aber eine solche Function gefunden, und bezeichnet man dieselbe mit $u + iv$, so wird

$$u + iv + \text{Const.}$$

eine Function sein, welche jenen Bedingungen 1, 2, 3 ebenfalls Genüge leistet. Und gleichzeitig wird man die in dieser letztern Function enthaltene additive Constante so bestimmen können, dass auch der Bedingung 4 Genüge geschieht.

Es unterliegt demnach keinem weiteren Zweifel, dass eine die Bedingungen 1, 2, 3, 4 erfüllende Function wirklich existiren muss.

Zu beweisen bleibt hingegen noch, dass immer nur eine einzige Function existirt, welche jenen vier Bedingungen entspricht. Wir nehmen einstweilen an, es existirten zwei solche Functionen $u + iv$ und $u_1 + iv_1$. Die Differenz

$$(u + iv) - (u_1 + iv_1) = \omega + i\vartheta$$

wird dann, wenn wir die einzelnen unverzweigten Schnittstrecken, aus welchen das Schnittsystem L besteht, mit l bezeichnen, folgende Eigenschaften haben:

1. $\omega + i\vartheta$ ist eine von $x + iy$ abhängende Function, welche innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{R}'$ überall eindeutig und stetig ist.

2. $\omega + i\vartheta$ besitzt zu beiden Seiten einer jeden Linie l Werthe, deren Differenz der Linie entlang constant und rein imaginär ist.

3. $\omega + i\vartheta$ ist in irgend einem einzelnen Punct der Fläche $\mathfrak{R}'$ gleich 0.

Das in positiver Richtung um $\mathfrak{R}'$ herumlaufende Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} \omega \, d\vartheta$$

kann, da der Rand von $\mathfrak{R}'$ durch die Ufer der Linien l repräsentirt wird, diesen Linien l entsprechend in einzelne Theile zerlegt werden. Der einer jeden Linie l entsprechende Theil wird, wenn man die Werthe von ω, ϑ auf dem e i n e n Ufer von l mit ω_1, ϑ_1, auf dem andern mit ω_2, ϑ_2 bezeichnet, folgendermassen lauten:

$$\int\limits_{l} (\omega_1 \, d\vartheta_1 - \omega_2 \, d\vartheta_2).$$

Da nun zufolge der 2. Eigenschaft $\omega_1 = \omega_2$ und $d\vartheta_1 = d\vartheta_2$ ist, so ergiebt sich, dass jeder solcher Theil den Werth 0 hat, dass also das Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} \omega \, d\vartheta$$

ebenfalls $= 0$ ist. Und hieraus ergiebt sich dann weiter (ähnlich wie früher S. 41), dass $\omega + i\vartheta = 0$ ist, dass also immer nur e i n e e i n z i g e Function $u + iv$ existiren kann, welche den im vorstehenden Theorem gestellten Bedingungen Genüge leistet.

Fünfter Abschnitt. Functionen von $x + iy$, welche auf einer Riemann'schen Kugelfläche mit Unstetigkeiten behaftet sein sollen, die durch eine willkührlich gegebene ebenfalls von $x + iy$ abhängende Function vorgeschrieben sind.

Wiederum sei $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche; und gleichzeitig seien x, y die Coordinaten der ihr zugehörigen Puncte.

Wir wenden uns zur Betrachtung von Functionen, welche

auf dieser Fläche mit vorgeschriebenen Unstetigkeiten behaftet sind, und unterscheiden demgemäss zwei Theile der Fläche, denjenigen, auf welchem die Function stetig ist, und denjenigen, welcher die vorgeschriebenen Unstetigkeiten enthält; den ersteren nennen wir $\mathfrak{S}$, den letzteren $\mathfrak{T}$.

Um die Vorstellung zu fixiren, denken wir uns auf der Fläche $\mathfrak{R}$ eine in sich zurücklaufende Linie λ, durch welche die Fläche in zwei völlig getrennte Stücke zerfällt; das eine von diesen Stücken soll den Flächentheil $\mathfrak{S}$, das andere den Flächentheil $\mathfrak{T}$ repräsentiren.

Ferner denken wir uns eine von $x + iy$ abhängende Function, welche nur für den Flächentheil $\mathfrak{T}$ gegeben ist, und deren Werthe auf diesem Flächentheil mit irgend welchen Unstetigkeiten behaftet sind. Ob diese Unstetigkeiten punctueller oder linearer Natur sind, ob sie nur die Function selber, oder ob sie gleichzeitig auch die Ableitungen derselben betreffen, ist gleichgültig. Wir bezeichnen jene Function mit $A_{\mathfrak{T}} + iB_{\mathfrak{T}}$, und haben also unter $A_{\mathfrak{T}}$ und $B_{\mathfrak{T}}$ zwei von x, y abhängende reelle Functionen zu verstehen, deren Werthe ebenfalls nur innerhalb $\mathfrak{T}$ gegeben sind.

Die vorgeschriebenen Unstetigkeiten sollen nun, je nachdem von imaginären oder reellen Functionen die Rede sein wird, entweder diejenigen sein, welche die Function $A_{\mathfrak{T}} + iB_{\mathfrak{T}}$ besitzt, oder diejenigen, mit welchen die Functionen $A_{\mathfrak{T}}$ und $B_{\mathfrak{T}}$ behaftet sind. Der Einfachheit willen nehmen wir an, dass keine von diesen Unstetigkeiten hart am Rande von $\mathfrak{T}$ liegt, oder hart an jenen Rand hinanreicht. Ebenso nehmen wir an, dass hart am Rande von $\mathfrak{T}$ auch kein Windungspunct vorhanden ist. Es wird dabei kaum nöthig sein zu bemerken, dass der Rand von $\mathfrak{T}$, ebenso wie der von $\mathfrak{S}$, durch die in sich zurücklaufende Linie λ repräsentirt ist.

Durch Fortsetzung der gegebenen Function $B_{\mathfrak{T}}$ über den Rand von $\mathfrak{T}$ hinaus können wir uns leicht eine Function verschaffen, welche sammt ihren natürlichen Ableitungen auf der ganzen Fläche $\mathfrak{R}$ überall stetig ist, abgesehen von den innerhalb $\mathfrak{T}$ befindlichen Unstetigkeiten. Eine solche Fortsetzung wird offenbar auf unendlich viele Arten bewerkstelligt werden können. Wir

nehmen an, dass eine bestimmte Wahl getroffen sei, und betrachten die durch diese Fortsetzung entstandene Function fortan als unveränderlich. $B_{\mathfrak{T}}$ selber ist dann der ursprünglich gegebene, das Flächenstück $\mathfrak{T}$ bedeckende Theil dieser Function; der neuentstandene, das Flächenstück $\mathfrak{S}$ bedeckende Theil mag mit $B_{\mathfrak{S}}$, und beide Theile zusammengenommen mögen kurzweg mit B bezeichnet werden.

Die Function $A_{\mathfrak{T}}$ ist ausgebreitet auf dem Flächentheil $\mathfrak{T}$, und erstreckt sich bis zum Rande dieses Flächentheiles, d. i. bis zur Linie λ hin. Zufolge des Satzes (Seite 33) wird sich auf dem andern Flächentheile, nämlich auf $\mathfrak{S}$ eine von x, y abhängende reelle Function ausbreiten lassen, welche am Rande von $\mathfrak{S}$ gleichwerthig ist mit $A_{\mathfrak{T}}$, und welche im Innern von $\mathfrak{S}$ folgende Eigenschaften besitzt:

I. Die Function ist sammt ihren natürlichen Ableitungen stetig.

II. Sie leistet der Gleichung $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$ Genüge.

Wir denken uns diese Function wirklich gebildet, und bezeichnen sie mit $A_{\mathfrak{S}}$. Die Functionen $A_{\mathfrak{T}}$ und $A_{\mathfrak{S}}$ besitzen auf der Grenze von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$ gleiche Werthe. Demnach wird es zweckmässig sein, beide Functionen zusammengenommen als eine einzige Function A zu betrachten, von welcher die ganze Fläche $\mathfrak{R}$ bedeckt ist.

Bevor wir weiter gehen, lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf folgende Puncte:

(1) .... *$A + iB$ ist eine die ganze Fläche $\mathfrak{R}$ bedeckende und unveränderlich festgesetzte Function, deren Werthe innerhalb $\mathfrak{T}$ von $x + iy$, innerhalb $\mathfrak{S}$ hingegen von x, y abhängig sind.*

A ist eine Function, welche sammt ihren natürlichen Ableitungen auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig ist, abgesehen von den vorgeschriebenen Unstetigkeiten, und von einem längs λ hinlaufenden Grat. In der Linie λ hängen nämlich die Werthe der Function A selber stetig zusammen, nicht aber die Werthe ihrer Ableitungen. Ausserdem ist $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben gleich Null.

B ist eine Function, welche sammt ihren natürlichen Ablei-

tungen auf der Fläche $\mathfrak{N}$ überall stetig ist, abgesehen von den vorgeschriebenen Unstetigkeiten. Der aus den zweiten Differentialquotienten zusammengesetzte Ausdruck $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$ ist nicht überall, sondern nur innerhalb $\mathfrak{T}$ gleich Null.

Die vorgeschriebenen Unstetigkeiten befinden sich im Flächentheile $\mathfrak{T}$, reichen aber nirgends bis hart an den Rand dieses Flächentheiles. Dieser Rand wird repräsentirt durch die in sich zurücklaufende Linie λ; denn die Linie λ bildet die Grenze zwischen den beiden Flächentheilen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$.

Längs der Linie λ, welche die Grenze zwischen den beiden Flächentheilen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ bildet, denken wir uns eine reelle und stetig zusammenhängende Werthenreihe F aufgepflanzt. Zufolge des Satzes (Seite 33) wird dann auf dem Flächentheil $\mathfrak{S}$ eine von x, y abhängende reelle Function ausgebreitet werden können, welche am Rande von $\mathfrak{S}$ gleichwerthig mit F ist, und welche im Innern von $\mathfrak{S}$ folgende Eigenschaften besitzt:

I. Die Function ist sammt ihren natürlichen Ableitungen stetig.

II. Sie genügt der Gleichung $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$.

Wir denken uns diese Function wirklich gebildet, und bezeichnen sie mit $U_{\mathfrak{S}}$.

Analoges führen wir auf $\mathfrak{T}$ aus; wir bedecken nämlich den Flächentheil $\mathfrak{T}$ mit einer von x, y abhängenden reellen Function, welche am Rande von $\mathfrak{T}$ ebenfalls gleichwerthig mit F ist, und welche im Innern von $\mathfrak{T}$ wiederum die Eigenschaften I, II besitzt. Diese Function mag $U_{\mathfrak{T}}$ heissen.

Die Functionen $U_{\mathfrak{S}}$ und $U_{\mathfrak{T}}$ besitzen auf der Grenze von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ gleiche Werthe, und können demnach zusammengenommen als eine einzige Function U angesehen werden, von welcher die ganze Fläche $\mathfrak{N}$ bedeckt ist.

(2.) . . . *Die Function U wird alsdann sammt ihren natürlichen Ableitungen auf der Fläche $\mathfrak{N}$ allenthalben stetig sein, abgesehen von einem längs λ hinlaufenden Grat. In der Linie λ sind nämlich die Werthe der Function U selber stetig, nicht aber die Werthe ihrer Ableitungen. Ausserdem wird die Function U auf der Fläche $\mathfrak{N}$ überall der Gleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ Genüge leisten.*

Wir betrachten gegenwärtig die längs λ aufgepflanzte Wertheureihe F als veränderlich. Die Gestalt der Function U ist an jene Werthenreihe gebunden, und wird sich, sobald jene geändert wird, gleichfalls ändern. Es mögen durch $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$, ... alle möglichen Gestalten dargestellt sein, deren die Werthenreihe F überhaupt fähig ist; und gleichzeitig mögen $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$, ... die zugehörigen Gestalten von U sein. Unter all diesen verschiedenen Gestalten der Function U wird eine existiren, für welche das über die Fläche $\mathfrak{R}$ ausgedehnte Integral

$$(3) \qquad \iint\limits_{\mathfrak{R}} \left\{ \left(\frac{\partial (U+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial (U+A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \right)^2 \right\} dx\, dy$$

am kleinsten ist. Diese specielle Gestalt von U mag mit u, und gleichzeitig die zugehörige Gestalt von F mit f bezeichnet werden. Zur Abkürzung werden wir übrigens das eben hingestellte Integral (3) hinfort mit

$$(3\text{a.}) \qquad \underset{\mathfrak{R}}{P}(U)$$

bezeichnen. Die Functionen A und B in diese abkürzende Bezeichnung mit aufnehmen zu wollen, würde überflüssig sein; denn A und B sind Functionen von unveränderlicher Gestalt.

Es handelt sich nun um eine nähere Untersuchung der durch die angegebene Minimumsbedingung bestimmten speciellen Function u.

Setzt man für den Augenblick $U = u + \delta$, so ergiebt sich leicht folgende identische Gleichung:

$$(4) \qquad \underset{\mathfrak{R}}{P}(u+\delta) = \underset{\mathfrak{R}}{P}(u) + \underset{\mathfrak{R}}{\Pi}(\delta) + \\ + 2 \iint\limits_{\mathfrak{R}} \left\{ \frac{\partial \delta}{\partial x} \left(\frac{\partial (U+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \right) + \frac{\partial \delta}{\partial y} \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right\} dx\, dy;$$

folglich, wenn man für δ seine eigentliche Bedeutung $U - u$ restituirt:

$$(5) \qquad \underset{\mathfrak{R}}{P}(U) = \underset{\mathfrak{R}}{P}(u) + \underset{\mathfrak{R}}{\Pi}(U-u) + 2\, \underset{\mathfrak{R}}{T},$$

wo $\underset{\mathfrak{R}}{T}$ folgendes Integral bezeichnet:

$$(6)\quad T_{\mathfrak{R}} = \iint\limits_{\mathfrak{R}} \left\{ \frac{\partial(U-u)}{\partial x}\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial(U-u)}{\partial y}\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x}\right)\right\} dx\, dy.$$

Wie sich die in diesem Integrale vorhandenen **ursprünglichen** Ableitungen von A, B, U, u auf der Fläche $\mathfrak{R}$ verhalten, ist uns unbekannt. Bekannt ist uns nur das Verhalten der **natürlichen** Ableitungen. Wir müssen daher, wenn wir das Integral in eine einfachere Form versetzen wollen, zurückgehen auf den **natürlichen** Zustand der Fläche $\mathfrak{R}$, oder vielmehr auf den **natürlichen** Zustand ihrer einzelnen Theile.

Wir führen zu diesem Zweck auf der Fläche $\mathfrak{R}$ zuerst einen längs λ fortlaufenden Schnitt aus, und fügen sodann zu diesem ersten Schnitt noch so viel andere Schnitte hinzu, als nothwendig ist, um die ganze Fläche in einzelne Stücke zu zerfällen, von denen jedes durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann. Irgend eines von diesen Flächenstücken mag $\mathfrak{J}$ heissen, und gleichzeitig mag $\mathfrak{E}$ diejenige Elementarfläche sein, durch welche der natürliche Zustand von $\mathfrak{J}$ dargestellt wird.

Wir betrachten zunächst denjenigen Theil des Integrales $T_{\mathfrak{R}}$, welcher über $\mathfrak{J}$ hinerstreckt ist, also das Integral:

$$(7)\quad T_{\mathfrak{J}} = \iint\limits_{\mathfrak{J}} \left\{ \frac{\partial(U-u)}{\partial x}\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial(U-u)}{\partial y}\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x}\right)\right\} dx\, dy;$$

unterscheiden dabei aber zwei Fälle, je nachdem $\mathfrak{J}$ zu $\mathfrak{S}$ oder zu $\mathfrak{T}$ gehört.

Erster Fall. Das Flächenstück $\mathfrak{J}$ gehört zu $\mathfrak{S}$.
Sind

$$(\mathfrak{J},\ x,\ y,\ A,\ B,\ U,\ u)$$

und

$$(\mathfrak{E},\ \xi,\ \eta,\ A,\ B,\ U,\ u)$$

die beiden Bilder, welche das Flächenstück $\mathfrak{J}$ sammt den darauf ausgebreiteten Werthen von A, B, U, u zur Zeit seines ursprünglichen und zur Zeit seines natürlichen Zustandes darbietet, so

wird das vorgelegte Integral (7), als Invariante, von gleichem Werth sein mit dem analogen über $\mathfrak{C}$ hinerstreckten Integral:

$$(8)\qquad \iint_{\mathfrak{C}} \left\{ \frac{\partial(U-u)}{\partial\xi}\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial\xi} - \frac{\partial B}{\partial\eta}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial(U-u)}{\partial\eta}\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial\eta} + \frac{\partial B}{\partial\xi}\right)\right\} d\xi\, d\eta;$$

Nun ist identisch:

$$\frac{\partial(U-u)}{\partial\xi}\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial\xi} - \frac{\partial B}{\partial\eta}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[(U-u)\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial\xi} - \frac{\partial B}{\partial\eta}\right)\right] -$$
$$- (U-u)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial\xi\,\partial\eta}\right),$$

$$\frac{\partial(U-u)}{\partial\eta}\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial\eta} + \frac{\partial B}{\partial\xi}\right) = \frac{\partial}{\partial\eta}\left[(U-u)\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial\eta} + \frac{\partial B}{\partial\xi}\right)\right] -$$
$$- (U-u)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial\xi\,\partial\eta}\right).$$

Addirt man diese beiden Formeln, so werden sich die letzten, mit dem Factor $(U-u)$ behafteten Glieder zerstören; denn zufolge (1) und (2) sind $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall $= 0$, und Gleiches gilt daher (vergl. Seite 27) auch von $\frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial\eta^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$. Das Integral (8) verwandelt sich demnach in:

$$(9)\qquad \iint_{\mathfrak{C}} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} + \frac{\partial\beta}{\partial\eta}\right) d\xi\, d\eta,$$

wo α und β folgende Bedeutungen haben:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \alpha &= (U-u)\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial\xi} - \frac{\partial B}{\partial\eta}\right),\\ \beta &= (U-u)\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial\eta} + \frac{\partial B}{\partial\xi}\right). \end{aligned}$$

Laut (1) und (2) sind die Functionen A, B, U, u sammt ihren natürlichen Ableitungen auf dem Flächentheil $\mathfrak{S}$ überall stetig, also auch auf $\mathfrak{J}$. Demnach werden auf $\mathfrak{J}$ oder auf $\mathfrak{C}$ auch die Ausdrücke α und β überall stetig sein.

Daraus folgt (Vorl. Seite 59), dass das Integral (9) identisch ist mit folgendem Randintegral:

$$(11)\qquad -\int_{\mathfrak{C}} \left(\alpha\frac{d\xi}{d\nu} + \beta\frac{d\eta}{d\nu}\right) d\sigma;$$

und dieses verwandelt sich, wenn man für α und β ihre eigentlichen Bedeutungen (10) restituirt, in:

(12) $$-\int_{\mathfrak{E}} (U-u)\left(\frac{d(u+A)}{d\nu} - \frac{\partial B}{\partial \eta}\frac{d\xi}{d\nu} + \frac{\partial B}{\partial \xi}\frac{d\eta}{d\nu}\right) d\sigma.$$

Hier stellt $d\sigma$ ein Randelement von $\mathfrak{E}$ vor, und ν die auf $d\sigma$ errichtete innere Normale. Versteht man gleichzeitig unter σ die positive Richtung des Randes, so sind (für jeden Punct des Randes) σ und ν zwei Richtungen, die ebenso zu einander liegen, wie die x Achse und y Achse eines rechtwinklichen Coordinatensystemes. Demnach ist (Vergl. Vorl. S. 79):

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{d\eta}{d\nu}, \quad \frac{d\xi}{d\nu} + \frac{d\eta}{d\sigma} = 0.$$

Hierdurch geht der in (12) unter dem Integralzeichen enthaltene Ausdruck

$$-\frac{\partial B}{\partial \eta}\frac{d\xi}{d\nu} + \frac{\partial B}{\partial \xi}\frac{d\eta}{d\nu}$$

über in

$$+\frac{\partial B}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{\partial B}{\partial \xi}\frac{d\xi}{d\sigma},$$

d. i. in

$$\frac{dB}{d\sigma}.$$

Das Integral (12) selber geht also über in.

(13) $$-\int_{\mathfrak{E}} (U-u)\left(\frac{d(u+A)}{d\nu} + \frac{dB}{d\sigma}\right) d\sigma.$$

Dieses Integral aber ist wiederum eine Invariante, also von gleichem Werth mit folgendem Integral:

(14) $$-\int_{\mathfrak{J}} (U-u)\left(\frac{d(u+A)}{dn} + \frac{dB}{ds}\right) ds.$$

Wir haben also schliesslich für das ursprünglich vorgelegte Integral (7) folgenden Werth gefunden:

(15) $$T_{\mathfrak{J}} = -\int_{\mathfrak{J}} (U-u)\left(\frac{d(u+A)}{dn} + \frac{dB}{ds}\right) ds.$$

Sind $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3, \ldots$ die einzelnen Stücke, in welche der Flächentheil $\mathfrak{S}$ zerlegt wurde, so ist:

(16) $$T_{\mathfrak{S}} = T_{\mathfrak{J}_1} + T_{\mathfrak{J}_2} + T_{\mathfrak{J}_3} + \ldots$$

Für jedes der Integrale $T_{\mathfrak{J}_1}, T_{\mathfrak{J}_2}, T_{\mathfrak{J}_3}, \ldots$ ergiebt sich ein mit (15) analoger Werth. Substituirt man all' diese Werthe in (16), so erhält man:

$$(17) \qquad T_{\mathfrak{S}} = -\int_{\mathfrak{S}} (U-u)\left(\frac{d(u+A)}{dn} + \frac{dA}{ds}\right) ds:$$

hier läuft die Integration um den Rand von $\mathfrak{S}$ herum; ds repräsentirt ein Element dieses Randes, s die p o s i t i v e Richtung des Randes, und n die Richtung der i n n e r e n Normale.

Zweiter Fall. Das Flächenstück $\mathfrak{J}$ gehört zu $\mathfrak{T}$.

Da $A + iB$ innerhalb $\mathfrak{T}$ von $x + iy$ abhängt, so gelten innerhalb $\mathfrak{T}$ die beiden Relationen:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} = 0.$$

In dem hier betrachteten Fall reducirt sich daher das Integral (7) auf:

$$(18) \qquad T_{\mathfrak{J}} = \iint_{\mathfrak{J}} \left\{\frac{\partial(U-u)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(U-u)}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right\} dx\, dy.$$

Dieses ist (als Invariante) von gleichem Werth mit dem analogen über $\mathfrak{E}$ hinerstreckten Integral

$$(19) \qquad \iint_{\mathfrak{E}} \left\{\frac{\partial(U-u)}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial(U-u)}{\partial \eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\} d\xi\, d\eta.$$

Nun ist identisch:

$$\frac{\partial(U-u)}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(U-u)\frac{\partial u}{\partial \xi}\right] - (U-u)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial(U-u)}{\partial \eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[(U-u)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right] - (U-u)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Substituirt man diese Werthe in (19) und beachtet man, dass $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ (wie bereits vorhin bemerkt wurde) gleich Null ist, so geht das Integral (19) über in:

$$(20) \qquad \iint_{\mathfrak{E}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta,$$

wo α und β folgende Bedeutungen haben:

$$\alpha = (U - u)\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\beta = (U - u)\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

Laut (2) sind die Functionen U, u sammt ihren natürlichen Ableitungen auf $\mathfrak{T}$ überall stetig. Gleiches gilt daher auch von den Grössen α und β. Demnach verwandelt sich das Integral (20) in folgendes Randintegral (Vorl. S 59):

(21) $$-\int_{\mathfrak{C}}\left(\alpha\frac{d\xi}{d\nu} + \beta\frac{d\eta}{d\nu}\right)d\sigma.$$

Dieses aber nimmt, wenn man für α und β ihre eigentlichen Bedeutungen restituirt, die Gestalt an:

(22) $$-\int_{\mathfrak{C}}(U - u)\frac{du}{d\nu}\,d\sigma;$$

und ist (als Invariante) identisch mit dem analogen über den Rand von $\mathfrak{J}$ hinerstreckten Integral

(23) $$-\int_{\mathfrak{J}}(U - u)\frac{du}{dn}\,ds.$$

Wir erhalten also in dem hier betrachteten Fall, wo $\mathfrak{J}$ zu $\mathfrak{T}$ gehört, für das Integral (7) folgenden Werth:

(24) $$T_{\mathfrak{J}} = -\int_{\mathfrak{J}}(U - u)\frac{du}{dn}\,ds;$$

hier ist ds ein Element der Randcurve von $\mathfrak{J}$, und n die auf diesem Element errichtete innere Normale.

Sind $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$ ... die einzelnen Stücke, in welche der Flächentheil $\mathfrak{T}$ zerlegt wurde, so ist

(25) $$T_{\mathfrak{T}} = T_{\mathfrak{J}_1} + T_{\mathfrak{J}_2} + T_{\mathfrak{J}_3} + \ldots$$

Substituirt man hier für die Integrale rechts die mit (24) analogen Werthe, so erhält man:

(26) $$T_{\mathfrak{T}} = -\int_{\mathfrak{T}}(U - u)\frac{du}{dn}\,ds,$$

wo ds ein Randelement von $\mathfrak{T}$ ist, und n die auf ds errichtete innere Normale vorstellt.

Die eben gefundene Formel kann noch etwas anders dargestellt werden. Da nämlich $A + iB$ innerhalb $\mathfrak{T}$ von $x + iy$ abhängt, so gelten innerhalb $\mathfrak{T}$ die Relationen:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y}, \qquad \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} = 0.$$

Und ebenso werden innerhalb $\mathfrak{T}$ auch folgende Relationen gelten:

$$\frac{dA}{ds} = \frac{dB}{dn}, \qquad \frac{dA}{dn} + \frac{dB}{ds} = 0,$$

vorausgesetzt, dass man unter s und n zwei auf einander senkrechte Richtungen versteht, die ebenso zu einander liegen, wie die x Achse und y Achse. So z. B. werden die letztgenannten Relationen gültig sein, wenn man unter s die positive Randrichtung von $\mathfrak{T}$, und unter n die auf diesem Rande errichtete innere Normale versteht. Thut man solches, so wird also der in (26) enthaltene Differentialquotient

$$\frac{du}{dn}$$

identisch sein mit

$$\frac{du}{dn} + \frac{dA}{dn} + \frac{dB}{ds}$$

Demgemäss kann das Integral (26) auch so dargestellt werden:

$$(27) \qquad \mathcal{T}_{\mathfrak{T}} = -\int_{\mathfrak{T}} (U - u)\left(\frac{d(u+A)}{dn} + \frac{dB}{ds}\right) ds.$$

Hier ist s die positive Richtung des Randes von $\mathfrak{T}$, und n die auf diesem Rande errichtete innere Normale.

Es handelt sich eigentlich um das in (5) angegebene Integral

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{R}}$$

Nun ist offenbar:

$$(28) \qquad \mathcal{T}_{\mathfrak{R}} = \mathcal{T}_{\mathfrak{S}} + \mathcal{T}_{\mathfrak{T}},$$

also, falls man die in (17) und (27) gefundenen Werthe substituirt:

$$(29) \qquad \mathcal{T}_{\mathfrak{R}} = -\int_{\mathfrak{S}} (U - u)\left(\frac{d(u+A)}{dn} + \frac{dB}{ds}\right) ds$$

$$- \int_{\mathfrak{T}} (U - u)\left(\frac{d(u+A)}{dn} + \frac{dB}{ds}\right) ds.$$

Von diesen beiden Integralen ist das eine über den Rand von $\mathfrak{S}$, das andere über den von $\mathfrak{T}$ hinerstreckt; beide Integrale sind also hinerstreckt über ein und dieselbe Linie, nämlich über die Linie λ. Verschieden sind aber in beiden Integralen die Bedeutungen von s, und auch die von n. Denn die positive Randrichtung von $\mathfrak{S}$ ist entgegengesetzt mit der von $\mathfrak{T}$; und ebenso sind auch die inneren Normalen von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ einander entgegengesetzt.

Wir bezeichnen in irgend einem Punct der Grenzlinie λ die positiven Randrichtungen von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ mit s_1 und s_2, ferner die daselbst errichteten inneren Normalen mit n_1 und n_2; in analoger Weise bezeichnen wir endlich die Werthe der Functionen A, B, U, u auf der einen Seite der Linie λ mit A_1, B_1, U_1, u_1, auf der andern mit A_2, B_2, U_2, u_2. Alsdann lässt sich die Formel (29) folgendermassen hinstellen:

$$(30)\qquad \underset{\mathfrak{R}}{T} = -\int_\lambda \left\{ (U_1 - u_1)\left(\frac{d(u_1+A_1)}{dn_1} + \frac{dB_1}{ds_1}\right) + (U_2-u_2)\left(\frac{d(u_2+A_2)}{dn_2} + \frac{dB_2}{ds_2}\right)\right\} ds,$$

wo die Integration längs der Linie λ einmal berumläuft. Zufolge der Art und Weise, wie die Functionen U, u gebildet sind, ist

$$U_1 = U_2 = F,$$
$$u_1 = u_2 = f,$$

mithin $U_1 - u_1 = U_2 - u_2 = F - f$; folglich:

$$(31)\qquad \underset{\mathfrak{R}}{T} = -\int_\lambda (F-f)\left(\frac{d(u_1+A_1)}{dn_1} + \frac{d(u_2+A_2)}{dn_2} + \frac{dB_1}{ds_1} + \frac{dB_2}{ds_2}\right) ds.$$

Zufolge (1) ist die Function B in der Linie λ nirgends unstetig, und zu beiden Seiten derselben von gleichem Werth. Sind also α und β irgend zwei längs jener Linie auf einander folgende Puncte, so wird

$$\frac{dB_1}{ds_1} = \frac{B_\beta - B_\alpha}{\alpha\beta}$$

sein, vorausgesetzt, dass die von α nach β laufende Richtung identisch mit derjenigen ist, welche wir durch s_1 bezeichnet haben. Mit dieser Richtung ist die durch s_2 bezeichnete entgegengesetzt. Demnach wird:

$$\frac{dB_2}{ds_2} = \frac{B_\alpha - B_\beta}{\beta\alpha}.$$

Die Nenner $\alpha\beta$ und $\beta\alpha$ bezeichnen in beiden Formeln die Entfernung zwischen den Puncten α, β, und sind also von gleicher Grösse. Somit ergiebt sich:

(32) $$\frac{dB_1}{ds_1} + \frac{dB_2}{ds_2} = 0.$$

Setzen wir also zur Abkürzung

(33) $$\frac{d(u_1 + A_1)}{dn_1} + \frac{d(u_2 + A_2)}{dn_2} = q,$$

so erhalten wir aus (31):

(34) $$\underset{\mathfrak{R}}{T} = -\int_\lambda (F - f)\, q\, ds.$$

Hierdurch geht nun die früher gefundene Formel (5) über in

(35) $$\underset{\mathfrak{R}}{P}(U) = \underset{\mathfrak{R}}{P}(u) + \underset{\mathfrak{R}}{\Pi}(U - u) - 2\int_\lambda (F - f)\, q\, ds.$$

Da u unter allen Functionen U diejenige vorstellt, für welche das Integral $\underset{\mathfrak{R}}{P}$ am kleinsten ist, so folgt aus dieser Formel, dass der Ausdruck

(36) $$\underset{\mathfrak{R}}{\Pi}(U - u) - 2\int_\lambda (F - f)\, q\, ds$$

niemals negativ werden kann.

Hieraus aber ergiebt sich in ganz gleicher Weise, wie bei früherer Gelegenheit (Seite 47, 48), dass q auf der Linie λ überall $= 0$ ist, dass also längs jener Linie

$$\frac{d(u_1 + A_1)}{dn_1} + \frac{d(u_2 + A_2)}{dn_2}$$

überall $= 0$ ist. Sodann ergiebt sich weiter (wiederum in gleicher Weise wie damals), dass die Ableitungen der Function $u + A$ zu beiden Seiten der Linie λ gleiche Werthe besitzen. Es wird demnach $u + A$ eine Function sein, welche in der Linie λ keinen Grat hat.

Mit Rücksicht auf (1) und (2) gelangen wir daher zu folgendem Ausspruch:

(37) . . . $u + A$ *ist eine Function, welche sammt ihren natürlichen*

auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig ist, abgesehen von den vorgeschriebenen Unstetigkeiten. Ausserdem ist

$$\frac{\partial^2(u+A)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(u+A)}{\partial y^2}$$

auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben gleich Null.

Sechster Abschnitt. Fortsetzung. Dem schon gebildeten reellen Theil der gesuchten Function wird der noch fehlende imaginäre Theil beigefügt.

Wir gehen in der Untersuchung, die im vorhergehenden Abschnitt begonnen wurde, weiter vorwärts. Es sei $\mathfrak{J}$ irgend ein Stück der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$, von beliebiger Lage, jedoch von solcher Beschaffenheit, dass es durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann. Das über den Rand von $\mathfrak{J}$ hinerstreckte Integral

(38) $$\int\limits_{\mathfrak{J}}\left\{\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial x}-\frac{\partial B}{\partial y}\right)dy-\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}\right)dx\right\}$$

ist eine Invariante, also, wenn man das natürliche Bild des Flächenstückes $(\mathfrak{J},\ x,\ y)$ mit $(\mathfrak{E},\ \xi,\ \eta)$ bezeichnet, von gleichem Werth mit folgendem Integral:

(39) $$\int\limits_{\mathfrak{E}}\left\{\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial \xi}-\frac{\partial B}{\partial \eta}\right)d\eta-\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial \eta}+\frac{\partial B}{\partial \xi}\right)d\xi\right\}.$$

Wir bezeichnen dieses letztere zur Abkürzung mit

(39 a.) $$\int\limits_{\mathfrak{E}}(\alpha\,d\eta-\beta\,d\xi),$$

wo dann α und β folgende Bedeutungen haben:

(40) $$\alpha=\frac{\partial(u+A)}{d\xi}-\frac{\partial B}{\partial\eta}\quad.\qquad \beta=\frac{\partial(u+A)}{\partial\eta}+\frac{\partial B}{\partial\xi}$$

Laut (37) ist der Ausdruck $\frac{\partial^2(u+A)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(u+A)}{\partial y^2}$ überall $=0$, also $\frac{\partial^2(u+A)}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2(u+A)}{\partial \eta^2}$ ebenfalls immer $=0$. Demnach ist

$$\alpha\,d\eta-\beta\,d\xi$$

jederzeit ein vollständiges Differential. Was die Stetigkeit der darin enthaltenen Grössen α und β anbelangt, so müssen wir je nach der Lage des gerade betrachteten Flächenstückes $\mathfrak{J}$ drei Fälle unterscheiden.

Erster Fall. $\mathfrak{J}$ liegt vollständig innerhalb des Flächentheiles $\mathfrak{S}$.

Laut (37) sind die natürlichen Ableitungen $\frac{\partial(u+A)}{\partial\xi}$, $\frac{\partial(u+A)}{\partial\eta}$ in diesem Fall innerhalb $\mathfrak{J}$ überall stetig. Gleiches gilt laut (1) auch von den natürlichen Ableitungen $\frac{\partial B}{\partial\xi}$, $\frac{\partial B}{\partial\eta}$. Gleiches gilt daher innerhalb $\mathfrak{J}$ oder, was dasselbe ist, innerhalb $\mathfrak{E}$ auch von den Grössen α und β.

Zweiter Fall. $\mathfrak{J}$ liegt vollstängig innerhalb des Flächentheiles $\mathfrak{T}$.

Laut (1) sind die Werthe von $A + iB$ alsdann innerhalb $\mathfrak{J}$ abhängig von $x + iy$; die Werthe von $x + iy$ sind aber ihrerseits gebunden an die Werthe von $\xi + i\eta$. Demnach werden die Werthe von $A + iB$ innerhalb $\mathfrak{J}$ von $\xi + i\eta$ abhängen. Es wird mithin innerhalb $\mathfrak{J}$

$$\frac{\partial A}{\partial\xi} - \frac{\partial B}{\partial\eta} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial\eta} + \frac{\partial B}{\partial\xi} = 0$$

sein. Hierdurch reduciren sich die Werthe der Grössen α und β auf: $\alpha = \frac{\partial u}{\partial\xi}$, $\beta = \frac{\partial u}{\partial\eta}$.
Diese aber sind laut (2) innerhalb des hier betrachteten Flächenstückes $\mathfrak{J}$ überall stetig. Wir sehen also, dass die Grössen α und β auch in diesem zweiten Fall innerhalb $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{E}$ durchweg stetig sind.

Dritter Fall. $\mathfrak{J}$ liegt zum Theil innerhalb $\mathfrak{S}$, zum andern Theil innerhalb $\mathfrak{T}$.

Die Linie λ wird alsdann durch das Flächenstück $\mathfrak{J}$ hindurchgehen, und dasselbe in zwei Theile zerlegen. Doch ist es zweckmässig, an Stelle der hier von selber dargebotenen Theilung eine gewisse andere Theilung eintreten zu lassen.

Laut (1) befinden sich die vorgeschriebenen Unstetigkeiten innerhalb des Flächentheiles $\mathfrak{T}$, reichen aber nirgends

bis hart an den Rand von $\mathfrak{T}$, also nirgends bis hart an die Linie λ. Wir können demnach innerhalb $\mathfrak{T}$ eine mit λ parallel laufende Linie λ' ziehen von solcher Lage, dass der zwischen λ und λ' befindliche (in sich zurücklaufende) Flächenstreifen von jenen vorgeschriebenen Unstetigkeiten völlig frei ist. Diese letztere Linie λ' ist es, welche wir zur Theilung des Flächenstückes $\mathfrak{J}$ benutzen. Von den so erhaltenen beiden Theilen wird dann der eine vollständig zu $\mathfrak{T}$ gehören; der andere hingegen wird nicht in seiner ganzen Ausdehnung zu $\mathfrak{S}$ gehören, sondern noch einen schmalen zu $\mathfrak{T}$ gehörigen Flächenstreifen mit umfassen. Wir bezeichnen den ersteren Theil mit $\mathfrak{J}_t$, den letztern mit $\mathfrak{J}_s$.

Dass die Grössen α und β innerhalb $\mathfrak{J}_t$ überall stetig sind, unterliegt dann keinem Zweifel, folgt nämlich unmittelbar aus den beim zweiten Fall angestellten Ueberlegungen.

Was andererseits $\mathfrak{J}_s$ anbelangt, so ist zu beachten, dass $\mathfrak{J}_s$ seiner Construction zufolge vollständig frei ist von den vorgeschriebenen Unstetigkeiten. Laut (37) sind daher $\frac{\partial(u+A)}{\partial\xi}$, $\frac{\partial(u+A)}{\partial\eta}$, und laut (1) auch $\frac{\partial B}{\partial\xi}$, $\frac{\partial B}{\partial\eta}$ innerhalb $\mathfrak{J}_s$ überall stetig. Gleiches muss daher auch von den Grössen α und β gelten.

Die Grössen α und β sind also nicht nur auf $\mathfrak{J}_t$, sondern auch auf $\mathfrak{J}_s$ überall stetig. Es fragt sich jetzt nur noch, ob diese Stetigkeit auch stattfindet an der Grenze von $\mathfrak{J}_t$ und $\mathfrak{J}_s$. Dass solches der Fall ist, erhellt augenblicklich, wenn man beachtet, dass diese Grenze keine vollständig bestimmte ist, dass nämlich die Grenzlinie λ' (ohne irgend welchen Nachtheil für die Gültigkeit der vorhergehenden Betrachtungen) näher herangeschoben werden kann an die gegebene Linie λ*).

*) Wollte nämlich Jemand behaupten, die Linie λ' repräsentire während ihrer anfänglichen Lage eine Unstetigkeitslinie der Grössen α, β, so würde es, um die Unrichtigkeit dieser Behauptung darzuthun, nur einer Verschiebung bedürfen, durch welche die Linie λ' in eine neue Lage gelangt, die näher an λ liegt, als die erste. Das Flächenstück $\mathfrak{J}_t$ wird dann bis an die neue Lage von λ' reichen, die anfängliche Lage von λ' also in sich enthalten. Innerhalb dieses Flächenstückes $\mathfrak{J}_t$ sind aber die Grössen α, β nun wiederum überall stetig. Sie sind also auch stetig in derjenigen Linie, durch welche die anfängliche Lage von λ' dargestellt wird; denn diese Linie liegt ja jetzt innerhalb $\mathfrak{J}_t$.

Wir sehen demnach, dass die Grössen α und β auch in dem hier betrachteten dritten Fall innerhalb des Flächenstücks $\mathfrak{J}$, mithin auch innerhalb $\mathfrak{E}$ überall stetig sind.

Somit ist bewiesen, dass der Ausdruck

$$\alpha d\eta - \beta d\xi,$$

mag nun die Lage des Flächenstücks $\mathfrak{J}$ auf der gegebenen Riemann'schen Fläche sein, wie sie wolle, ein Differential vorstellt, welches auf diesem Flächenstück, also auch **auf der Elementarfläche $\mathfrak{E}$ allenthalben vollständig und stetig ist.** Daraus aber folgt unmittelbar (Vorl. S. 70), dass das über den Rand dieser Elementarfläche hinerstreckte Integral

$$\int_{\mathfrak{E}} (\alpha d\eta - \beta d\xi)$$

gleich **Null** ist, dass mithin Gleiches auch gilt von dem um $\mathfrak{J}$ herumlaufenden Integral (38). Das so erhaltene Resultat:

$$(41) \qquad \int_{\mathfrak{J}} \left\{ \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \right) dy - \left(\frac{\partial (u+A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \right) dx \right\} = 0$$

lässt sich nun unmittelbar erweitern.

Denken wir uns nämlich aus der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ ein **ganz beliebig gestaltetes** Stück herausgeschnitten, so wird sich dieses jederzeit durch geeignete Schnitte in ein System kleinerer Stücke zerlegen lassen, welche die an $\mathfrak{J}$ gestellte Anforderung erfüllen, von welchen nämlich jedes durch stetige Umformung in seinen natürlichen Zustand versetzt werden kann. Für jedes dieser kleineren Stücke wird also die Formel (41) Gültigkeit besitzen. Stellt man alle diese Formeln auf, und summirt dieselben, so ergiebt sich, dass die Formel (41) auch für das ursprüngliche **beliebig gestaltete** Flächenstück Gültigkeit hat. Also:

(42) . . . *Betrachtet man ein ganz beliebiges Stück der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, so wird das in positiver Richtung über den Rand dieses Flächenstückes hinerstreckte Integral*

$$\int\left\{\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial x}-\frac{\partial B}{\partial y}\right)dy-\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}\right)dx\right\}$$

jederzeit gleich Null *sein.*

Wir verwandeln gegenwärtig die Fläche $\mathfrak{R}$ durch irgend welche Schnitte L in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ (ganz gleichgültig, ob diese Schnitte L die gegebene Linie λ durchkreuzen, oder nicht durchkreuzen), und bilden sodann das von einem festen Punct s auslaufende, und in seiner Bewegung auf die Fläche $\mathfrak{R}'$ eingeschränkte Integral:

$$(43)\qquad v=\int_s^p\left\{\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial x}-\frac{\partial B}{\partial y}\right)dy-\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}\right)dx\right\}.$$

Aehnlich wie bei früherer Gelegenheit (Seite 35, 36) ergiebt sich auf Grund des eben gefundenen Satzes (42) mit Leichtigkeit, dass dieses Integral v in einem gegebenen Punct p immer mit ein und demselben Werth anlangen wird, welches auch die Bahn sein mag, auf welcher es nach p hinläuft. Bezeichnen wir also die Coordinaten des Punctes p mit x, y, so ist v eine von x, y abhängende Function, die innerhalb $\mathfrak{R}'$ überall eindeutig ist.

Sind p_0 und p_1 zwei auf einander folgende Lagen des Punctes p, so ist

$$(44)\qquad \int_{p_0}^{p_1}\left\{\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial x}-\frac{\partial B}{\partial y}\right)dy-\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}\right)dx\right\}$$

derjenige Zuwachs, welchen die eben genannte Function v beim Fortschreiten des Punctes p von p_0 nach p_1 erhält. Das Integral, durch welches dieser Zuwachs repräsentirt wird, ist eine Invariante. Denkt man sich also um p_0 und p_1 herum ein kleines Flächenstück $\mathfrak{J}$ abgegrenzt, und bezeichnet man das mit $(\mathfrak{J}, x, y, p_0, p_1)$ correspondirende natürliche Bild durch $(\mathfrak{E}, \xi, \eta, \pi_0, \pi_1)$, so wird jener Zuwachs von v auch so dargestellt werden können:

$$(45)\qquad \int_{\pi_0}^{\pi_1}\left\{\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial \xi}-\frac{\partial B}{\partial \eta}\right)d\eta-\left(\frac{\partial(u+A)}{\partial \eta}+\frac{\partial B}{\partial \xi}\right)d\xi\right\};$$

also, wenn man eben dieselben Abkürzungen wie zuvor (S. 68) einführt, dargestellt werden können durch:

$$(46) \qquad \int_{\pi_0}^{\pi_1} (\alpha\, d\eta - \beta\, d\xi).$$

Die Grössen α und β sind, wie wir vorhin gesehen haben, auf $\mathfrak{J}$ oder auf $\mathfrak{E}$ überall stetig. Demnach ist das Integral (46) unendlich klein, sobald π_0 unendlich nahe an π_1 liegt, das Integral (44) also unendlich klein, falls p_0 und p_1 einander unendlich nahe sind.

Wir sehen hieraus, dass die Function v jederzeit einen unendlich kleinen Zuwachs erhält, sobald der Punct p oder x, y um eine unendlich kleine Strecke fortschreitet. Mit andern Worten: wir sehen, dass die Function v innerhalb $\mathfrak{R}'$ überall stetig ist.

Bisher haben wir über die Schnitte L, durch welche die Fläche $\mathfrak{R}$ in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ verwandelt wurde, keinerlei Voraussetzung gemacht. Fortan wollen wir, allerdings nur der Bequemlichkeit willen, annehmen, dass diese Schnitte sammt und sonders im Flächentheil $\mathfrak{S}$ liegen, dass also der Flächentheil $\mathfrak{T}$ von ihnen unversehrt bleibt. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{\partial (u + A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} = a,$$

$$\frac{\partial (u + A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} = b,$$

so wird:

$$v = \int_{s}^{p} (a\, dy - b\, dx).$$

Ist l irgend eine unverzweigte Schnittstrecke des mit L bezeichneten Schnittsystemes, so werden die Grössen a und b zu beiden Ufern von l einerlei Werthe besitzen. Solches ergiebt sich unmittelbar aus den Sätzen (1) und (37), falls man nur darauf achtet, dass die Schnitte L, mithin auch l vollständig innerhalb $\mathfrak{S}$ liegen.

Sind α_1, α_2 zwei zu beiden Ufern von l einander gegenüberliegende Puncte, ferner β_1, β_2 zwei andere solche Puncte, und gehören α_1, β_1 zu dem einen, α_2, β_2 zu dem andern Ufer, so wird die Differenz der beiden Werthe $v(\alpha_1)$ und $v(\beta_1)$, d. i. die Differenz der beiden Werthe, welche die eindeutige

Function v in den Puncten α_1 und β_1 besitzt, dargestellt sein durch folgendes Integral:

$$(47)\qquad v(\beta_1) - v(\alpha_1) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} (a\,dy - b\,dx).$$

Desgleichen wird:

$$(48)\qquad v(\beta_2) - v(\alpha_2) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} (a\,dy - b\,dx).$$

In beiden Fällen kann die Integration auf beliebiger Bahn fortlaufen, nur muss sie durchweg innerhalb $\mathfrak{R}'$ bleiben; sie darf also den durch die Ufer der Schnitte L dargestellten Rand nirgends überschreiten. Wir können, da l eine unverzweigte Schnittstrecke repräsentirt, die eine Integration längs des einen, die andere längs des anderen Ufers von l fortlaufen lassen. Thun wir dies, so ergiebt sich unmittelbar, dass beide Integrale von gleichem Werth sind; denn wir wissen ja, dass die Grössen a, b zu beiden Ufern einerlei Werthe besitzen. Die Formeln (47) und (48) führen also zu folgender Gleichung:

$$v(\beta_1) - v(\alpha_1) = v(\beta_2) - v(\alpha_2),$$

oder, was dasselbe ist, zu folgender:

$$v(\beta_1) - v(\beta_2) = v(\alpha_1) - v(\alpha_2).$$

Die Differenz der Werthe, welche v in zwei zu beiden Ufern von l einander gegenüberliegenden Puncten besitzt, ist demnach längs l hin überall ein und dieselbe.

Wir gelangen somit in Betreff der Function v, wenn wir Alles zusammenfassen, zu folgendem Ergebniss:

(49) . . . *Die von x, y abhängende Function v ist auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme der Linien L, allenthalben eindeutig und stetig; in den Linien L ist sie mit constanten Werthdifferenzen behaftet. Die Linien L liegen sämmtlich innerhalb $\mathfrak{S}$; der Flächentheil $\mathfrak{T}$ ist also frei von diesen Linien.*

Uebertragen wir dieses Resultat auf das Aggregat $v + B$, und beachten wir dabei die in (1) angegebenen Eigenschaften von B, so lautet dasselbe folgendermassen:

(50) . . . *Die von x, y abhängende Function $v + B$ ist auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$, abgesehen von den vorgeschriebenen*

Unstetigkeiten und abgesehen von den Linien L, allenthalben eindeutig und stetig. In den Linien L ist sie mit constanten Werthdifferenzen behaftet.

Aus der für v gegebenen Definition (43) folgt unmittelbar:

$$dv = \left(\frac{\partial(u+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y}\right) dy - \left(\frac{\partial(u+A)}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x}\right) dx,$$

mithin:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(u+A)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(u+A)}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x},$$

oder, was dasselbe ist:

(51) $$\frac{\partial(u+A)}{\partial x} - \frac{\partial(v+B)}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial(u+A)}{\partial y} + \frac{\partial(v+B)}{\partial x} = 0.$$

Daraus aber ergiebt sich, dass der Ausdruck

$$(u + A) + i(v + B)$$

eine Function repräsentirt, welche nicht von x, y, sondern nur von dem einen Argument $x + iy$ abhängig ist. Diese Function wird nun laut (37) und (50) auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig und stetig sein, abgesehen von den vorgeschriebenen Unstetigkeiten, und abgesehen von gewissen in den Linien L vorhandenen constanten und rein imaginären Werthdifferenzen. Die vorgeschriebenen Unstetigkeiten befinden sich sämmtlich im Flächentheil $\mathfrak{T}$, die Linien L sämmtlich im Flächentheil $\mathfrak{S}$.

Ferner mag noch daran erinnert werden, dass die von x, y abhängende Function

$$u + iv$$

laut (2) und (49) auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und stetig ist, abgesehen von einem in der Linie λ vorhandenen Grat, und abgesehen wiederum von gewissen in den Linien L vorhandenen Werthdifferenzen.

Setzen wir nun schliesslich:

$$(u + A) + i(v + B) = U + iV,$$

mithin $u + iv = (U + iV) - (A + iB)$, so führen die eben ausgesprochenen Ergebnisse, falls wir an Stelle von $u + iv$ die

neu eingeführte Function $U + iV$ in den Vordergrund treten lassen, zu folgendem Theorem:

Viertes Theorem.

Sind x, y die Puncte einer Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, und ist $A + iB$ eine von $x + iy$ abhängende Function, welche für ein beliebiges Gebiet $\mathfrak{T}$ jener Fläche gegeben, und daselbst mit beliebigen Unstetigkeiten behaftet ist; so existirt jederzeit eine die ganze Fläche $\mathfrak{R}$ bedeckende und ebenfalls von $x + iy$ abhängende Function $U + iV$, welche dieselben Unstetigkeiten wie $A + iB$ besitzt, welche aber, abgesehen von diesen und abgesehen von gewissen rein imaginären Werthdifferenzen, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig ist.

Denkt man sich nämlich die Fläche $\mathfrak{R}$ durch irgend welche Schnitte L in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ verwandelt, und nimmt man der Kürze willen an, dass diese Schnitte L das Unstetigkeitsgebiet $\mathfrak{T}$ unversehrt lassen, so existirt eine von $x + iy$ abhängende und auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutige Function $U + iV$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. *$U + iV$ besitzt im Gebiete $\mathfrak{T}$ dieselben Unstetigkeiten, wie die gegebene Function $A + iB$, ist aber, abgesehen von diesen Unstetigkeiten und abgesehen von den Linien L, auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig.*
2. *Innerhalb des Gebietes $\mathfrak{T}$ ist die Differenz $(U + iV) - (A + iB)$ überall stetig.*
3. *In den Linien L ist die Function $U + iV$ mit constanten, und zwar rein imaginären Werthdifferenzen behaftet.*
4. *Die Function $U + iV$ besitzt in irgend einem einzelnen Punct der Fläche $\mathfrak{R}$ einen vorgeschriebenen Werth.*

Zusatz. Es existirt immer nur eine einzige Function $U + iV$, welche diese Bedingungen erfüllt.

Dass eine den Bedingungen 1, 2, 3 genügende Function existiren muss, folgt unmittelbar aus der vorhergehenden Untersuchung. Ist aber eine solche Function gefunden, und bezeichnet man dieselbe mit $U + iV$, so wird

$$U + iV + \text{Const.}$$

eine Function sein, welche jenen Bedingungen 1, 2, 3 ebenfalls Genüge leistet. Und gleichzeitig wird man die in dieser enthal-

tene additive Constante so bestimmen können, dass auch der Bedingung 4 Genüge geschieht.

Es unterliegt demnach keinem weiteren Zweifel, dass eine die Bedingungen 1, 2, 3, 4 erfüllende Function wirklich existiren muss.

Zu beweisen bleibt hingegen noch, dass immer nur eine einzige Function vorhanden ist, welche jenen Bedingungen genügt. Wir nehmen einstweilen an, es existirten zwei solche Functionen $U + iV$ und $U_1 + iV_1$. Die Differenz

$$(U + iV) - (U_1 + iV_1) = \omega + i\vartheta$$

wird dann folgende Eigenschaften besitzen:

1. $\omega + i\vartheta$ ist eine von $x + iy$ abhängende Function, welche innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig ist.

2. Ist l irgend eine zum Schnittsystem L gehörige unverzweigte Schnittstrecke, so besitzt $\omega + i\vartheta$ zu beiden Seiten von l Werthe, deren Differenz der Linie l entlang constant und rein imaginär ist.

3. $\omega + i\vartheta$ ist in irgend einem einzelnen Punct der Fläche $\mathfrak{R}'$ gleich 0.

Hieraus aber folgt, wie wir bei früherer Gelegenheit nachgewiesen haben (S. 55), dass die Differenz $\omega + i\vartheta$ allenthalben $= 0$ ist; dass also nur eine Function $U + iV$ existiren kann, welche die angegebenen Bedingungen erfüllt.

Aus den Functionen, deren Existenz durch das dritte und vierte Theorem erwiesen ist, lassen sich leicht diejenigen Functionen ableiten, deren sich Riemann in seiner Untersuchung über die Abel'schen Integrale bedient. Diese entstehen nämlich aus jenen durch Superposition. Um solches darzulegen, werden wenige Worte genügen.

Es sei $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche; auf derselben mögen einzelne Gebiete $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots \mathfrak{T}_s$ abgegrenzt gedacht werden, die zerstreut daliegen wie einzelne Inseln. Innerhalb eines jeden solchen Gebietes sei eine von $x + iy$ abhängende Function gegeben, welche daselbst mit irgend welchen (punctuellen oder linearen) Unstetigkeiten behaftet ist; diese Func-

tionen mögen der Reihe nach bezeichnet werden mit $\varphi_1 (x + iy)$, $\varphi_2 (x + iy)$, ... $\varphi_s (x + iy)$, oder kürzer φ_1, φ_2, ... φ_s.

Die Fläche $\mathfrak{R}$ ist eine geschlossene Fläche, und besitzt also einen Zusammenhang ungeraden Grades (Vorl. Seite 309); sie sei $(2p + 1)$ fach zusammenhängend. Um die Fläche in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln, werden alsdann $2p$ Querschnitte erforderlich sein (Vorl. Seite 309).

Der **erste** von diesen Querschnitten wird seinen Anfang und auch sein Ende in der unendlich kleinen Oeffnung haben, die auf der Fläche $\mathfrak{R}$, weil sie geschlossen ist, supponirt werden muss (Vorl. Seite 309). Was die **übrigen** Querschnitte anbelangt, so wollen wir uns dieselben einen nach dem andern und in solcher Weise ausgeführt denken, dass jeder spätere Querschnitt in einem Uferpunct irgend eines früheren Querschnitts seinen Anfang nimmt, und in dem gegenüberliegenden Uferpunct jenes Querschnittes sein Ende erreicht. Von sämmtlichen $2p$ Querschnitten wird alsdann jeder, für sich allein betrachtet, eine in sich zurücklaufende Linie darstellen. Wir bezeichnen diese $2p$ Linien mit L_1, L_2, ... L_{2p}, und denken uns dieselben, der grösseren Bequemlichkeit willen, in solcher Weise gezogen, dass die gegebenen Flächengebiete $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, ... $\mathfrak{T}_s$ von ihnen weder durchschnitten noch berührt werden.

Gleichzeitig wollen wir uns, den Linien L_1, L_2, ... L_{2p} entsprechend, irgend welche reelle Constanten C_1, C_2, ... C_{2p} gegeben denken.

Zufolge des dritten Theoremes (Seite 53) wird eine von $x + iy$ abhängende Function existiren, welche in der Linie L_π mit einer constanten Werthdifferenz behaftet ist, deren reeller Theil gleich der gegebenen Constanten C_π ist, welche ferner in den übrigen Linien L irgend welche constante und rein imaginäre Werthdifferenzen besitzt, und welche endlich, abgesehen von diesen linearen Unstetigkeiten, auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig ist.*) Wir bezeichnen diese Function, entsprechend der Linie $\mathfrak{L}_\pi$, welche bei ihrer Bildung eine bevorzugte Rolle spielte, mit $\Psi_\pi (x + iy)$ oder Ψ_π. Nehmen wir an Stelle von

*) Dass eine solche Function existirt, folgt nämlich aus dem dritten Theorem unmittelbar, falls man nur die in jenem Theorem auftretende Linie λ zusammenfallen lässt mit der Linie L_π.

L_π der Reihe nach sämmtliche Linien $L_1, L_2, \ldots L_{2p}$, so erhalten wir im Ganzen $2p$ Functionen, die mit $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_{2p}$ zu bezeichnen sind. Setzen wir nun die Summe

$$\Psi_1 + \Psi_2 + \ldots + \Psi_{2p} = \Psi,$$

so wird Ψ eine Function sein, welche in den Linien $L_1, L_2, \ldots L_{2p}$ mit constanten Werthdifferenzen behaftet ist, deren reelle Theile gleich $C_1, C_2, \ldots C_{2p}$ sind, und welche abgesehen von diesen Linien auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall stetig ist.

Wir gehen weiter. Zufolge des vierten Theoremes (Seite 76) muss eine Function $\Phi_\sigma(x + iy)$ oder Φ_σ existiren, welche im Gebiete $\mathfrak{T}_\sigma$ dieselben Unstetigkeiten besitzt, wie die daselbst gegebene Function φ_σ, welche aber, abgesehen von diesen Unstetigkeiten, ferner abgesehen von irgend welchen constanten und rein imaginären Werthdifferenzen, mit denen sie in den Linien $L_1, L_2, \ldots L_{2p}$ behaftet sein wird, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall stetig ist. Den Gebieten $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots \mathfrak{T}_s$ entsprechend erhalten wir s solche Functionen, die mit $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_s$ zu bezeichnen sind; wir setzen:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_s = \Phi.$$

Addiren wir nun schliesslich die vorhin gebildete Function Ψ und die gegenwärtig erhaltene Φ, so ergiebt sich eine Function

$$\Psi + \Phi = F,$$

welche folgende Eigenschaften besitzt:

1. *F ist eine von $x + iy$ abhängende Function, welche in den Gebieten $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots \mathfrak{T}_s$ die durch die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_s$ vorgeschriebenen Unstetigkeiten besitzt, welche aber, abgesehen von diesen Unstetigkeiten und abgesehen von den Linien $L_1, L_2, \ldots L_{2p}$, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall stetig ist.*

2. *In den Linien $L_1, L_2, \ldots L_{2p}$ ist die Function F mit constanten Werthdifferenzen behaftet, deren reelle Theile gleich gross sind mit den gegebenen Constanten $C_1, C_2, \ldots C_{2p}$.*

Zufolge der angewendeten Theoreme sind die Functionen $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_{2p}$ und $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_s$ durch die ihnen auferlegten Bedingungen vollständig bestimmt, bis auf additive Constanten. Gleiches gilt demnach auch von ihrer Summe, d. i. von der Function F.

Hiermit sind wir zu dem Satz gelangt, welcher das Fundament von Riemanns glänzenden Untersuchungen bildet, der wahrscheinlich aber auch in anderen Richtungen für die weitere Entwickelung der mathematischen Wissenschaft von grosser Bedeutung sein wird.

Tübingen, den 11. September 1865.
